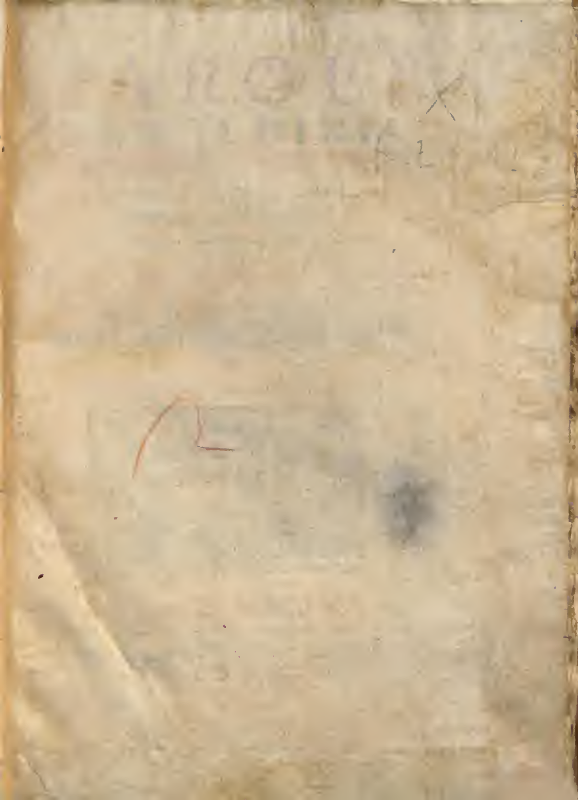




CAROLI RENALDINII

SERENISSIMI COSMI TERTII MAGNI ETRVRIÆ DVCIS Philosophi, ac Mathematici,

ET IN PATAVINO LYCEO PHILOSOPHI Primæ Sedis.

GEOMETRA PROMOTVS

EIDEM SERENISS. MAGNO DVCI D.





PATAVII, MDCLXX.

Typis Petri Mariæ Frambotti Bibliopolæ.

SVPERIORVM PERMISSV.



CAROLI RENARDINII
IN SVVM
PROMOTVM GEOMETRAM
Præfatio.



Tractationem illam ad extremum aggredimur, in qua de Vnitate, quatenus in Geometria quidem usum habere potest, nobis est differendum. Hanc autem prouinciam nos aliquan dò susscepturos esse, non semel polliciti sumus. Res magni momenti est; ita nimirum vt facilè mihi suaserim, Geometram aliunde tàm magnas suppetias ad veritatem indagandam desumere non posse; præsertim in concinnandis demonstrationibus, difficilimarum Effectionum, quas Analysta didicit ab Arte sua.

Proponitur agendum de vsu Vnitatis in rebus Geometricis. Magna istius vsus vtilitas.

At verò duo videbantur esse, de quibus erat operæ pretium Artificem esse magnoperè sollicitum. Vnum Geometrica Effectio: Alterum eiusdem Demonstratio; Illud quidem; nam tametsi ritè fuerit Analysis ordinata, & inde Porisma deductum; nisi tamen præsto sit modus, quo quidem ad oblati Problematis resolutionem conducente, perficiatur Effectio, nihil actum videtur; eùm potius analyticum laborem illum pertulisse, sit oleum, ac operam perdidisse. Erat propterea, cur quàm plurimas Lineas qualiscunque nobis illas dictauerit solertia, perquireremus, vt ijs videlicet opitulantibus, datum nobis foret in arenam descendere, ne Problematum illorum, quorum difficultas Veterum torsit ingenia, nobis negotij quicquam facesseret; sed potius ea meditatione persequi, & resoluenda suscipere, nullius ferè laboris foret; eùm alioquin ijs olim satisfacere, nemini Mortalium licere, nisi consulto quidem Oraculo, crederetur.

Duo sunt, de quibus oportet Analystam esse sollicitum. Effectio Geometrica, eiusque demonstratio.

Alterum, quod quam maximè in votis, quædam erat differendi ratio, qua non fortuitò Effectionem ipsam, dictante Porismate, demonstraremus, non Arabum via salebrosa, ac ardua, sed Regia quidem Euclidis incedentes; quod, etsi citra puluerem fieri posse cuilibet fateri necesse sit, eùm scilicet in ipsa peragenda resolutione, nullus ad solida, & multò minus ad imaginarias quantitates sit ascensus; quam sæpissime tamen exigui laboris non est, comparatam iam Effectionem Euclideo more demonstrare. Nos autem necessitate quadem adacti, nostras esse partes credidimus, hunc supplere Artis defectum; vt hac nimirùm sic locupletata, Veterum Analystarum neminem posthac nos admirari debeamus:

Olim ijs credebatur impossibile Problematibus satisfacere, quæ Auctor resoluenda suscipit, Quando non fit ascensus supra plana, nullius laboris est Problemata resoluere.

quod si fortassis perspectum ijs fuisset, non tàm auidè sua, de industria, perquisitionis vestigia, occultassent; quasi Posteris inuidentes hanc Artem indagatricem, suis verbis ab ijs extorquere vellent assensum. Antiquis tamen habendæ sunt gratiæ non vulgares, quòd eousquè nobis artificiosam illam indagandi rationem suppresserint, vt coegerint nos ad nouam hanc proprio Marte parandam: de qua non iniuria præsens ætas gloriari possit.

Huius tractationis compendium.

Hæc autem vniuersa, quam præ manibus habemus, Tractatio docet, qua ratione per Analogismum omnia Potestatum genera, facto initio à Quadrato, Vnitatis præsidio, in simplicissimas longitudines resoluantur. Hunc itaque in modum, nedum Potestates ipsæ, verum etiam & ijs homogenea tractantur, non secus ac si longitudines forent: vnde demonstratio omnis per longitudines ipsas procedit; ac proinde quamuis Analysis ad solida, quinimmò ad imaginarias quantitates ascenderit, & per earum æqualitatem processerit, adhuc tamen nostra hæc, quam subijcimus, Methodo, licet eiusdem Analyseos vestigia repetere, ad demonstrationes contexendas, tàm solidis, quàm altioris ordinis quantitatibus neglectis, vt non minus Geometrica Effectio, quàm eiusdem legitima demonstratio sit obuia. Opus quidem hactenus inaccessum, magnopere tamen exoptatum; non enim Artifici parum erat dedecori, hinc non demonstrationem, sed Effectionem ipsam attendere. Quantum porrò Veteres Analystæ peccassent in Arte, non erit operosum intelligere ex ijs, quæ proprio Marte, haud Musis inuitis, adinuenimus.

Authoris Methodus magnam habet vtilitatem adiunctam.

Tractandorum ordo.

Appendix de Maximis, & Minimis ad calcem huius Tractatus differtur.

Primum igitur de Geometricis Effectionibus agendum: postmodum autem de contexendis demonstrationibus Vnitatis præsidio disputandum; deinde hæc eadem exemplis illustranda sunt; Tandem Appendicem de Maximis, & Minimis subijciemus, in qua vniuersalem, generalemque demonstrandi formam, perquisitionisque modum afferemus; Quamuis enim Veteres, non sine magno virtutis splendore, nominisque celebritate, hac de re Lucubrationes ediderint, tamen nullà id lege factum ab ipsis iure dixeris; quicquid enim sunt, de Maximis, & Minimis tractantes, meditati, casu potiùs, quàm Artificiosa disserendi ratione præstitisse, uidentur. Recentiores contra ad præcepta industriosè admodum omnia redigentes, Artem resolutricem, non sine magno Reipublicæ Litterariæ commodo, ac utilitate auxerunt. Hæc igitur huius Tractationis summa esto. Superest, ut hìc Lectorem certiorem faciamus, nobis in animo quidem esse, hac methodo beneficio Vnitatis absoluta, generalem quandam resoluendi, componendique normam tradere, atque docere; non quasi innumera Problemata, alijs Methodis, resolui non posse existimemus (quod non fuit prorsus abs re animaduertisse) sed quia eo saltem nomine hæc ceteris præferenda uidetur, quòd ad infinita, eaque difficilima resoluenda Problemata conducit, quibus, vnica quauis reliquarum opitulatione obuiam ire non licet.

Recentiorum Methodus pro Maximis, & Minimis indagandis maximè commendabilis.

Huius Methodi excellentia, atque præstantia.

DE

DE GEOMETRICIS EFFECTIONIBVS.



Effectio Naturæ ordine demonstrationem præcedit; quamobrem primùm hic de ipsa differendum.

Est autem Effectio in Analyticis operatio à Porismate præscripta; cùm enim in omni Problemate sit aliquid nobis operandum, & quid operandum sit Porisma præscribat; hoc ipsum est quod effectionem appellant. Cùm autem dicimus, in quouis Problemate aliquid nobis operandum esse, ac illud à Porismate præscribi, sano id modo intelligendum, vt suo loco monuimus; nam re vera nihil est, quod operamur, sed per hunc loquendi modum significamus ortum, seu genesin, vel alicuius diuisionis, additionis, vel alicuius figuræ, vel alicuius proportionis &c. nihil est, inquam, quod operamur; haud enim concessum est nobis lineam ducere, figuras describere &c. nisi intellectu, ac imaginatione; At si id, quod nobis imaginari licet, aliquid à nobis operabile dicendum erit, tunc dicemur aliquid operari, cum aliquid, quod in re non est, imaginatione effingimus. Num verò id ritè sit dictum, penes te iudicium esto. Superiùs enim aduertimus, nec Arithmeticam, nec Geometriam &c. esse de re operabili, si res operabilis accipiatur iuxtà communem vsum loquendi; quod si sumatur pro omni eo, quod nos operari valeamus, etsi tantummodò actibus intellectus, sic essent de re operabili; vnde lineam ducere, circulum describere, cæteraque perficere, quæ in huiusmodi Disciplinis locum habent, hoc sensu erit operari; ac ob id eo. gnitio, quæ de his est, si circa hæc ipsa versetur operabili modo, præscribendo scilicet præcepta, ac regulas, quibus nos actibus mentis lineam imaginatione descriptam, hoc, vel illo modo diuidere valeamus, & alia consimilia conficere possimus, practica dicetur; at quæ in sola veritatis indagatione sistit, nec nobis inseruire potest ad hoc, vel illud, nec etiam actibus mentis operandum, in magnitudinibus, numeris &c. contéplatiua nũcupabitur. Effectio igitur, de qua loquimur, eo sensu est vsurpanda, quo in his, & consimilibus aliquid à nobis effici dici potest.

Effectio quid sit in Analysi.

Quo sensu Mathematica de re operabili dici possint, & quo ratione practica.

Ad hanc igitur Effectionem quod attinet, reuocandum est in memoriam, quod suo loco non semel à nobis inculcatum fuit, nimirùm omnia linearum genera adhiberi posse; cùm omninò à veritate alienum arbitraremur, Geometram tantummodò circulo, lineaque recta vti posse; id enim intollerabile duximus; quamobrem liberum existimamus Geometræ quodcunque lineæ genus assumere, cuius natura ad oblati Problematis effectionem conducit.

Omne linearum genus in Effectionibus adhiberi posse.

Non solum igitur lineam circularem, cum linea recta, sed omnes sectiones conicas, nimirùm lineas, Parabolicam, Hyperbolicam, & Ellipticam; præterea Concoideam, Cycloideam &c. de quibus initio multa diximus, adhiberi posse censemus, His autem adijcimus illas, quas Mediceas dicebamus. Solertia igitur Artificis erit oblati Problematis naturam introspicere, ac diligenter attendere, quod nam sit lineæ genus, ad optatam Effectionem conducens; nam quæcunque illa extiterit, ea est adhibenda; in quo tantùm illud est obseruandum, vt si plures lineæ proposito satisfaciant, ea seligatur, quæ minus composita est; vnde si Problemati satisfacere licet præsidio lineæ circularis cum linea recta, cauendum à lineis magis compositis, vt à parabolica, hyperbolica, &c.

In quo potissimum; Artificis solertia posita sit.

Sed vt in arenam descendamus; primum occurrit considerandus modus, quo alij Problemata, quæ solida dicuntur, construere consueuerunt; omnia enim problemata, quorum Effectio lineam magis compositam, quam circularem requirit, solida nuncuparunt; Sed nos antiquâ retentâ partitione Problematum, in Plana, Solida, & Linearia, procedimus, contendentes, ijs Problematibus, quorum constructio, siue Effectio, neque per circulum, neque per conicas sectiones haberi potest, per alias lineas, tùm antiquas, tùm à nobis excogitatas, quæ tamen, vtpote communissimæ, omnibus Problematibus inseruiunt, plenè, ac planè satisfacere.

Primò considerandus modus, quo problemata solida construunt.

Erat autem subsequens modus, quo Cartesius vtebatur, ad construenda Problemata solida.

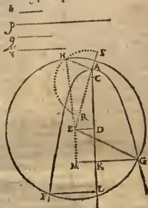
Pro-

Problemata solida ad æquationes trium, vel quatuor dimensionum reuocata Cartesius, ad eum qui sequitur modum, construxit.

Conicæ sectiones præcipuè verò ea, quæ Parabole dicitur, suppeditat nobis viam ad
construenda Problemata solida, quæ ad æquationem trium, vel quatuor dimensio-
num redacta fuere.

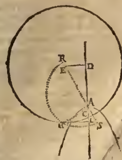
Id autem, vt assequamur, iuuabit secundum æquationis terminum de medio tollere, si
nimirum adsit obseruatis præceptis iam supra traditis; atque adeò oportebit æquationem
ad hanc formam redigere $u^3 = * b p u; b^2 q$, quando nimirum incognita quantitas tres tan-
tummodò dimensiones habeat.

Vel ad hanc reducetur $u^4 = * b p u^2; b^2 q u; b^3 r$; si videlicet ignorata quantitas quatuor
dimensiones habuerit; cumque b, sumi posit vnitatis loco, proindè prior illa reducetur
ad hanc $u^3 = * p u, q$; Secunda verò verò ad istam $u^4 = * p u^2, q u, r$.



Supponamus Parabolen F A G, iam esse descriptam; (utimur demonstratione Cartesij, rectè concludente) eius autem axis sit A C D K L. Sit autem recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ, siue latus rectum B (quid autem sit latus rectum Paraboles patet ex Apollonio); illud verò statuendum est b, vel 1; sit porrò dimidium ipsius A C. Punctum autem C sit intra Parabolen, cuius vertex sit A. Oportet autem facere C D = ½ p, quæ sumenda est in recta A C, continuata versus C, quando nimirùm in æquatione habeatur + p, versùs tamen alteram partem, si adsit − p. E puncto autem D, vel ex puncto C, cùm non habetur quantitas p, erigatur ad axem perpendicularis D E, æqualis ½ q; deinde centro E, describatur circulus F G, cuius semidiameter sit A E, non intercedente quantitate r. Quòd si hæc intercesserit vtrinque (si tamen signo + afficiatur) producatur vlterius, & in hac linea A E, hoc pacto vtrinque producta sumatur ex vna parte A R = r, ex altera verò A S, quæ sit æqualis lateri recto Paraboles; quod quidem supponimus esse 1. Describatur verò circulus, cuius diameter R S, & erigatur A H, perpendicularis ad A E, occurrens huic circulo in H, puncto per quod circulus alter F H G, transire debet. At verò si quantitas r, afficeretur signo −; oporteret in alio circulo, cuius diameter A E; oporteret, inquam, inscribere A I, æqualem inuentæ A H, & per punctum inuentum I, primus ille circulus F I G, transire debet, primus, inquam, circulus quæsitus.

Vide primam figuram.



Oportet autem animaduertere ab hoc circulo secari, vel tangi posse Parabolen in vno, vel duobus, tribus, vel quatuor punctis, à quibus nimirùm, si ad axem demittantur lineæ perpendiculares, habebuntur omnes æquationis

radices

radices tàm veræ, quàm falsæ. Itaque si quartitas, quæ ponebatur q, affecta sit signo +, radices veræ erunt illæ ex his perpendicularibus, quæ nimirum ex eadem parte Paraboles, qua est E, circuli centrum, reperientur, quemadmodum FL, reliquæ autem, vt GK, falsæ erunt. Contra verò si quantitas q, prædicta affecta fuerit signo −, illæ quidem veræ erunt, quæ ex altera sunt parte, falsæ autem, quæ ex parte illa, vbi centrum E, reperitur. Quod si eueniat vt circulus hic, neque secet, neque tangat parabolen in aliquo puncto, id planè argumento erit æquationem nullam radicem admittere, neque veram, neque falsam, sed tantùm imaginarias.



Supponamus autem GK, inuentam esse, radicem quæsitam u; AK, erit u^2; siquidem GK in Parabola, medio loco proportionalis est inter AK, & latus rectum; cumque latus rectum sit 1, sequitur AK, esse u^2. Si verò ab AK, auferatur AC, quæ est $\frac{1}{2}$, cum sit dimidium lateris recti, vt, & CD, quæ est $\frac{1}{2}p$, remanebit DK, siue EM; $u^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, huius autem quadratum est $u^4 - pu^2 - u^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$; erat autem DE, siue KM; $\frac{1}{2}q$; Quamobrem tota GM, erit $u + \frac{1}{2}q$; cuius quadratum est $u^2 + qu + \frac{1}{4}q^2$ duobus autem additis hisce quadratis, & fiet $u^4 - pu^2 + qu + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$, pro quadrato ipsius rectæ GE, quæ nimirùm est basis trianguli rectanguli EMG.

$$u^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$$
$$u^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$$
$$- \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}$$
$$- \frac{1}{2}pu^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}p$$
$$u^4 - \frac{1}{2}pu^2 - \frac{1}{2}u^2$$
$$u^4 - pu^2 - u^2 - \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$$

$$u^4 - pu^2 - u^2 + \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$$
$$u^2 + qu + \frac{1}{4}q^2$$
$$u^4 - u^2 + qu + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$$

Cum autem hæc eadem linea GE, sit circuli FG, semidiameter, erit etiam alijs modis explicabilis. Si igitur ED fuerit $\frac{1}{2}q$, & AD, $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, certè EA, erit, $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4})}$ eo quia triangulum illud sit rectangulum, cuius rectus angulus est ADE. Cum autem AH, sit media proportionalis, inter rectam AS, positam æqualem lateri recto, quod esse 1, dicebamus, & rectam AR; quæ est r; proindè AH erit $\sqrt{r}$, quia verò angulus EAH rectus est: quadratum ex EH, siue EG erit, $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$, erit igitur æquatio huiusmodi

$$\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r = u^4 - pu^2 + qu + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$$

Et per Antithesin in $u^4 = * + pu^2 - qu + r$

Huius igitur æquationis radix erit GK, quæ ponebatur u.

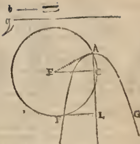
b

p

q

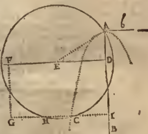
r

Præ-



Præsidio huius parabolicæ sectionis inter duas datas rectas lineas haud est difficile duas alias medio loco proportionales adinuenire, Supponamus itaque datas esse rectas b,q, inter quas operæ pretium sit reperire duas rectas medio loco proportionales in proportione continua. Dicamus vnam esse u, erit autem vt b, ad u, ita u, ad $\frac{uu}{b}$, & vt u, ad $\frac{uu}{b}$, ita $\frac{uu}{b}$ ad $\frac{u^3}{bb}$; quamobrem æquatio fiet huiusmodi $\frac{u^3}{bb} = q$, nempe $u^3 = * b^2 q$; modo verò describatur Parabole F A G, & ex eius axe sumatur segmentum A C; quod æquale sit dimidio lateris recti eiusdem Paraboles, quod cum diceremus esse 1, prædictum segmentum erit $\frac{1}{2}$, Erigatur ex puncto C perpendicularis C E, quæ æqualis fiat dimidio iam datæ q; & centro E, per A, descripto circulo A F, innotescent F L, L A, mediæ quæsitæ.

Cùm autem Cartesius omiserit demonstrationem, qua scilicet ostendatur, quatuor lineas b, L F, L A, & q, continuè proportionales esse; proinde non erit abs re, id quàm breuiter, perspicuèque demonstrare, sed hæc etiam supra demonstrata sunt.



Sit Parabole A C, cuius axis sit A B, vertex autem A, latus rectum sit b, cuius dimidio fiat æquale segmentum A D. ex quo puncto agatur D E, quæ sit dimidia datæ rectæ q, inter quam & b, oporteat reperire duas medias proportionales; Deinde centro E, interuallo verò E A, describatur circulus secans axem A B in K, & sectionem ipsam in C; modò protracta D E, vlterius vsque ad peripheriam circuli, & per punctum C, ducatur recta parallela ipsi D E, quæ sit C H, at verò fiat E F, æqualis ipsi E D, cadat ex puncto F, recta F G, ad rectos angulos cum F D, ac proindè parallela rectæ D B, occurrens lineæ C H, protractæ in G; hæc verò ex alia parte protrahatur occurrens rectæ AB, in I. Dico C I, I A, duas medias esse proportionales inter b, & q. Quoniam enim C I, est semiordinatim applicata, erit rectangulum sub b, & A I, æquale quadrato ex C I, constat ex Apollonio 1. lib. Coni. vt igitur b, ad C I, ita C I, ad I A; at verò G I, æqualis est F D, & F D, æqualis est q, ex constructione, ergo rectangulum comprehensum sub G I, & I C, idem erit quod sub q, & C I; sed rectangulum G I C, siue sub G I, & I C, æquale est quadrato ex I A, ergo rectangulum sub C I, & q, æquabitur quadrato ex I A; quamobrem erit, vt C I, ad I A, ita I A, ad q, itaque quatuor proportionales erunt b, C I, I A, & q.

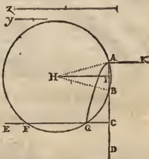
Quod autem rectangulum G I C, æquale sit quadrato ex I A, demonstratur; quadratum enim ex I A, æquale est a rectangulo A I K, plus rectangulo I A K, sed rectangulum
a 2. secundi. A I k, æquale est rectangulo H I C, ergo quadratum ex I A, æquabitur rectangulo HIC, plus rectangulo I A k, sed rectangulum I A k, æquale est quadrato ex C I, ob naturam Paraboles; siquidem A K, æquatur b, lateri recto eiusdem, ergo quadratum ex I A, æquale erit rectangulo H I C, plus quadrato ex C I, hoc est ex G H, sed rectangulum HIC, plus quadrato ex G H, æquale est rectangulo G I C, ergo rectangulum G I C, æquale erit quadrato ex A I, rectè igitur dicebamus esse continuè proportionales b, C I, I A, & q; Quod ostendere oportebat.

Hinc

Hinc liquet illud idem, quod lib. 2. de Resolutione, & Compositione ostendimus &c.

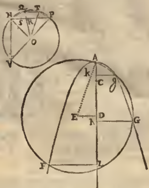
HIc enim nil aliud colligitur, quàm quod superiori demonstratione consecuti sumus; licet in ipsa demonstrandi forma discrimen aliquod tyroni videri posset.

Dicebamus enim. Quoniam rectangulum FCG æquale est rectangulo ACB; vtrinque addito quadrato GC; ergo rectangulum FCG, plus quadrato GC, hoc est rectangulum ECG, æquabitur rectangulo ACB, plus quadrato GC; sed quadrato GC æquale est rectangulum CAB, ob parabolen; (est enim AB æqualis AK lateri recto) ergo rectangulum ECG, æquabitur rectangulo ACB, plus rectangulo CAB; sed rectangulum ACB, plus rectangulo CAB, est æquale quadrato AC; ergo rectangulum ECG, æquabitur quadrato AC; ergo vt EC, ad AC, ita AC, ad CG; sed vt AC, ad CG, ita CG, ad AB, ob parabolen, cùm rectangulum BAC, hoc est sub AK latere recto, & axe AC, æquale sit quadrato CG; ergo vt EC, ad AC, ita AC, ad CG, & vt AC, ad CG, ita CG, ad AB; ergo inter duas EC, AB, duæ quidem AC, CG mediæ continuè proportionales inuentæ sunt. At verò EC est ex constructione æqualis Z, & AB æqualis Y; ergo inter duas datas Z, Y, duas adinuenimus medias proportionales AC, CG, in continua ratione.



Quod facere propositum erat. Vides igitur hanc demonstrationem à superiori verbis tantùm differre.

HInc etiam patebit anguli rectilinei trisectio. Sit igitur angulus rectilineus NOP; diuidendus trifariam, siuè arcus NQTP, diuidendus sit in tres partes æquales; Sumatur NO, æqualis 1, pro radio circuli, & NP, æqualis q, pro subtensa dati arcus, atque NQ, æqualis u, pro subtensa trientis eiusdem arcus, erit vt NO, ad NQ, ita NQ, ad QR, & ita QR, ad RS; ducta nimirùm QS, parallela ipsi TO; ductis autem NQ, OQ, & OT, & cùm ON, idem quod 1, & NQ, supponatur u, QR, erit u^2, & RS, erit u^3, vnde consurget æquatio $u^3 = * 3u - q$; Et quia RS, seù u^3 impedit quo minus NP, sit tripla ipsius lineæ NQ, quæ nimirum est u; consurget æquatio proindè huiusmodi, $q = 3u - u^3$; Vel $u^3 = * 3u - q$.



Quod autem sint quatuor proportionales ON, NQ, QR, RS, patet; nam triangulum ONQ, simile est triangulo NQR; siquidem angulus ad Q, communis est; & angulus QNR, hoc est QNP, est insistens arcui QP, cui insistit QOP, cuius dimidium QOT, seù NOQ; quarè NOQ, æquabitur QNR; ac proindè triangula erunt similia, ergo vt ON, ad NQ, ità NQ ad QR; & quia triangulum QRS, simile est triangulo NQR; angulus enim ad R, est communis, anguli, QOT, seu QON, hoc est QNR, & SQR sunt inter se æquales, ergo, & reliquus QSR æquabitur reliquo NQR; quare triangula erunt æquiangula, atque adeò similia; scil. triangulum SRQ, simile erit triangulo NQR; proindè, vt NQ, ad QR, ita QR, ad RS; sunt igitur proportionales ON, NQ, QR, RS; Quod oportebat ostendere.

Totum autem istius Artis opus in eo positum est, vt æquationes propositæ ad vnam ex his formulis reducantur, videlicet.

$$u^3 = * - pu + q$$
$$u^3 = * + pu + q$$
$$u^3 = * + pu - q$$

Hac enim reductione facta citrà laborem, licebit radicem extrahere iuxtà præcepta elapsis temporibus inuenta, & nunc à nobis explicata.

Si igitur sit æquatio prima $u^3 = * - pu + q$, hæc methodus obseruari debet. Sumatur $+\frac{1}{2}q$, illudque seruetur, mox autem accipiatur $\frac{1}{4}q^2$, cui addatur $\frac{1}{27}p^3$, & ex aggregato extrahatur latus quadratum, illudque addatur ipsi $+\frac{1}{2}q$, superius seruato: ex toto hoc autem aggregato, sumatur latus cubicum, cui subducatur latus cubicum huius residui, nempe sumatur $\text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$; ex hoc autem latere subtrahatur $\frac{1}{2}q$, ita vt fiat $-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$; huius porrò residui latus cubicum erit $\text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ factaque subtractione, vt dictum est, futura est radix, vt hic vides.

$$\text{℞c}(+\tfrac{1}{2}q + \text{℞}(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)) - \text{℞c}(-\tfrac{1}{2}q + \text{℞}(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3))$$

Hæc autem iuuabit numeris explicare. Sit æquatio huiusmodi.

$$\begin{matrix} 1\,c & + 72\,R & = 1720 \\ u^3 & p & q \end{matrix}$$

Huius æquationis radix erit.

$\text{℞c}(+860 + \text{℞}(739600 + 13824)) - \text{℞c}(-860 + \text{℞}(739600 + 13824))$

Hoc est $\text{℞c}(+860 + \text{℞}\,753424) - \text{℞c}(-860 + \text{℞}\,753424)$

Hoc est $\text{℞c}(+860 + 868) - \text{℞c}(-860 + 868)$

Hoc est $\text{℞c}\,1728 - \text{℞c}\,8$

Hoc est $12 - 2$, Hoc est 10, & ita 10 erit radix propositæ æquationis.

Huius autem methodi demonstratio sic se habet.

A ———————— B ———— C

Supponamus A B, æquari u, est autem u, radix superioris æquationis, quæ quidem supponitur valere 10, adeò vt A C, æquetur huic nempe $\text{℞c}(+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$. Si igitur accipiatur residuum istud idest $\text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ æquale nimirum lineæ B C, eorum differentia erit $\text{℞c}(+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)) - \text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$, & quidem æqualis erit hæc differentia ipsi A B. Si verò statuamus A B, æquari u, differentia cuborum ex prædictis radicibus, nempè differentia inter $\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ nempè cubum ex $\text{℞c}(+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$, & hunc scilicet $-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ cubum scilicet ex $-\text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ erit inquam istorum cuborum differentia æqualis q, vt patet ex opere multiplicationis.

Cubus	$+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ ex A C	$= 12$
Cubus	$-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ ex B C	$= 2$
q	Differentia cuborum supradictorum	

Erit igitur q, differentia inter cubum lineæ A C, & cubum lineæ B C. Cubus autem ex A B; atque triplum productum rectarum A C, B C, A B, simul æquantur eidem differentiæ q; quandoquidem cubus ex AB; plus cubo, ex B C, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B, simul æquatur cubo lineæ A C. Vt enim q, est differentia inter illos duos cubos $+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ & $-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ ità cubus ex A B, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B, simul; Proindè cubus ex A B, plus triplo producto, rectarum A C, B C, A B, æquabitur q. Proindè u^3, nempe cubus ex A B, vna cum triplo producto linearum A C, BC, A B, æquabitur q. Illud autem triplum productum comparabitur si multiplicemus binomium $\text{℞c}(+\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ æquale rectæ A C, per residuum $\text{℞c}(-\frac{1}{2}q + \text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ æquale rectæ B C. At verò instituta multiplicatione, vt vides ex $\text{℞}(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ in se, fit certè $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$. Insuper ex $+\frac{1}{2}q$, in $-\frac{1}{2}q$, fit $-\frac{1}{4}q^2$; Si igitur ad istud $+\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, addatur $-\frac{1}{4}q^2$, fit summa $+\frac{1}{27}p^3$; Etenim $+$, & $-$, in additione subtrahuntur.

Producta

Producta verò facta ex ✠ $\frac{1}{2}$ q, & -- $\frac{1}{2}$ q in Radicem illam nimirùm ℞($\frac{1}{4}$ q² ✠ $\frac{1}{27}$ p³); quoniam vnum euadit affectum signo †, alterum verò signo --; proindè se mutuò destruunt; quamobrē si ducatur ℞c(† $\frac{1}{2}$ q † ℞($\frac{1}{4}$ q² † $\frac{1}{27}$ p³) in hāc nimirùm ℞c(-- $\frac{1}{2}$ q ✠ ℞($\frac{1}{4}$ q² ✠ $\frac{1}{27}$ p³)) ; fiet productū ℞c($\frac{1}{27}$ p³) seu $\frac{1}{3}$ p, nempè

℞c(✠ $\frac{1}{2}$ q ✠ ℞($\frac{1}{4}$ q² ✠ $\frac{1}{27}$ p³))
℞c(-- $\frac{1}{2}$ q ✠ ℞($\frac{1}{4}$ q² ✠ $\frac{1}{27}$ p³))
✠ ℞c(.......) ✠ $\frac{1}{4}$ q² ✠ $\frac{1}{27}$ p³
-- ℞c(........) -- $\frac{1}{4}$ q²
$\frac{1}{27}$ p³
℞c $\frac{1}{27}$ p³
seù $\frac{1}{3}$ p³

radix cubica ipsius $\frac{1}{27}$ p³; fit autem illud productum ℞c($\frac{1}{27}$ p³); quoniam radices cubicæ ligatæ fuerunt multiplicatę; proindè etiam productū debet esse tale, nempè radix ligata &c. triplum autem productum (erat enim inæquatione plus triplo producto rectarum AC, BC, AB), erit quidem p, hoc autem si multiplicetur per u; quoniam productum ex AC, in BC, fuit ductum in AB; proindè fiet p u; quamobrem u³ ✠ p u, æquabitur q, vel u³, æquabitur -- p u ✠ q, vel demum u³ ✠ p u -- q = o.

Superius à nobis assumptum fuit, quod verissimum est nempè. Si fuerit recta A C vtcunque in B, diuisa, cubum lineæ A B, plus cubo lineæ B C, atque triplo producto linearum A C, B C, A B, simul æquari cubo lineæ A C. Supponamus A B, æquari a, & BC, æquari b, tota A C, æquabitur a ✠ b; erit autem productum linearum AC, BC, AB, idem quod b a² ✠ b² a, huius triplū est 3 b a² ✠ 3 b² a, huic autem si addantur cubi linearum A B; B C, fiet a³ ✠ 3 b a² ✠ 3 b² a ✠ b³; hæc autem summa, æqualis est cubo ex recta A C, nam hæc erat a ✠ b, cuius cubus constat opere multiplicationis.

a ✠ b
a ✠ b
b a ✠ b²
a² ✠ b a
a² ✠ 2 b a † b²
a ✠ b
b a² ✠ 2 b² a ✠ b³
a³ ✠ 2 b a² ✠ b² a
a³ ✠ 3 b a² † 3 b² a ✠ b³

Vidimus hactenus methodum explicādi primum æquationis genus nunc ad secundum.

Sit igitur æquatio u³ = * † p u † q, siuè quod idem est u³ -- p u = q; huius æquationis radix erit ℞c(✠ $\frac{1}{2}$ q † ℞($\frac{1}{4}$ q² -- $\frac{1}{27}$ p³)) ✠ ℞c(✠ $\frac{1}{2}$ q -- ℞($\frac{1}{4}$ q² -- $\frac{1}{27}$ p³)). Suponamus ℞c(† $\frac{1}{2}$ q † ℞($\frac{1}{4}$ q² † $\frac{1}{27}$ p³)) æquari AB, & deinde BC, esse ℞c(† $\frac{1}{2}$ q -- ℞($\frac{1}{4}$ q² - $\frac{1}{27}$ p³)), Summa cuborum, vtriusque lineæ, erit q.

Si AC, æquetur u, cuius cubus erit u³, si ab eius cubo iam dicto, auferatur triplum productū linearum A B, BC, & AC, seu u remanebunt cubi linearum AB, BC, qui simul sumpti æquātur q. Triplum enim productum, rectarum AB, BC, & AC, seu u, plus cubis rectarū AB, BC, æquatur cubo ex AC, seù ex u; quare si à cubo ex AC, seù u, nempè ab u³, auferamus triplum productum, ex AB, BC, & u, remanebunt cubi linearum AB, BC, hi autem simul sumpti sunt æquales q. At verò productum ex AB, & BC, est ℞c $\frac{1}{27}$ p³, Siuè $\frac{1}{3}$ p.

† $\frac{1}{2}$ q † ℞($\frac{1}{4}$ q² -- $\frac{1}{27}$ p³)
† $\frac{1}{2}$ q -- ℞($\frac{1}{4}$ q² -- $\frac{1}{27}$ p³)
q Summa cuborum

productū ex AB, BC, hoc est ex ℞c($\frac{1}{2}$ q † ℞($\frac{1}{4}$ q² -- $\frac{1}{27}$) in ℞c(† $\frac{1}{2}$ q -- ℞($\frac{1}{4}$ q² -- $\frac{1}{27}$ p³)) est ℞c $\frac{1}{27}$ p³, siuè $\frac{1}{3}$ p, vt patet ex opere multiplicationis. Si enim † ℞($\frac{1}{4}$ q -- $\frac{1}{27}$ p³) ducatur in -- ℞($\frac{1}{4}$ q² -- $\frac{1}{27}$ p³). ob signa †, & --, fiet productum -- $\frac{1}{4}$ q² ✠ $\frac{1}{27}$ p³, multiplicata verò vtraque radice per † $\frac{1}{2}$ q, euanescent producta ob signa †, & --, & remanet † $\frac{1}{2}$ q, in se ducendum, vt fiat $\frac{1}{4}$ q², quoaddito ad -- $\frac{1}{4}$ q² ✠ $\frac{1}{27}$ p³, fiet sūma ℞c $\frac{1}{27}$ p³, & erit totum productum ex illa multiplicatione. Quamobrem eius radix cubica $\frac{1}{3}$ p, erit quoque productum; huius autem triplum est p, quo ducto in u, fit p u, æquale triplo producto linearum A B, B C, A C; & quia u³, minus huiusmodi triplo producto æquabatur cubis ex A B, B C, qui æquales erant q; proindè u³ -- p u, æquabitur q.

℞c(† $\frac{1}{2}$ q † ℞($\frac{1}{4}$ q² -- $\frac{1}{27}$ p³))
℞c(† $\frac{1}{2}$ q -- ℞($\frac{1}{4}$ q² -- $\frac{1}{27}$ p³))
✠ ℞c(......) -- $\frac{1}{4}$ q² † $\frac{1}{27}$ p³
$\frac{1}{4}$ q² -- ℞c(......)
℞c $\frac{1}{27}$ p³
seu $\frac{1}{3}$ p

Numeris autem illustratur superior doctrina hunc in modum. Sit æquatio 1 c -- 72 R = 280. Sumatur dimidium numeri 280, nempè 140, & ab eius quadrato subtrahatur 13824, nempè quotiens, qui oritur diuiso 373248, cubo ex 72, per 27, & remanet 5776, cuius radix quadrata est 76, qua subtracta ex 140, remanet 64, huius radix cubica est 4, quæ seruanda est. Sumatur idem 140, cui addatur 76, nempè radix illius numeri 5776, ortum ducentis ex illa subtractione; facta autem additione habetur 216; cuius latus cubicum est 6, cui addatur latus cubicum 4, superius seruatum, & fiet 10, pro radice quæsita.

Non raro contingit stante æquatione $u^3 = * p u + q$, Seù $u^3 -- p u = q$; Quadratum dimidij vltimi termini scilicet q, non esse maius cubo trientis quantitatis cognitæ, penultimi termini nempè p; Tunc supponendus circulus N Q P V, cuius semidiameter erit N O, isque sit ℞ $\frac{1}{3}$ p; siue media proportionalis inter tertiam partem quantitatis notæ p, & vnitatem. Huic circulo supponatur inscripta N P, quæ sit $\frac{q}{p}$ nempè, vt sit ad alteram datam quantitatem q, vt vnitas ad tertiam partem ipsius p; modo vterque arcus, tam scilicet N Q P, quàm N V P, diuidatur trifariam; tunc enim N Q, radix erit quæsita quemadmodum N V. Itaque istius æquationis radix non alio modo exprimetur, quam dicendo, esse subtendentem illius arcus, qui tertia pars est arcus illius cuius subtendens est $\frac{q}{p}$, radio siuè semidiametro existente vno. Vel illa, quæ subtendit tertiam partem reliqui arcus &c.

Quamobrem si daretur æquatio 1 c -- 30 R = 36; procedendum, vt supra. Sed ad generalem nostram construendi rationem accedamus.

Lineæ MEDICEAE, *quas Auctor ad generalem Effectionem Problematum excogitauit, luculenter explicantur.*

Prætermissis autem Lineis antiquitùs excogitatis, de quibus iam suprà multa diximus; proximum est, vt quas adinuenimus, hic subijciamus, quarum tria sunt genera. Quorum Primum decem continet Lineas.

Primum genus Linearum MEDICEARVM, *& ad hoc primum genus pertinentium*

PRIMA

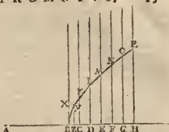
Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^2 + b a = z^2.$$

PRimi generis Linearum, quas Mediceas appello, prima quidem est illa, quæ ad Geometricam effectionem conducit Problematum eorum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadratum afficitur adiunctione plani sub latere, dataque coefficiente longitudine. Idem profectò, quod, dissimulare non licet, Circuli beneficio consequimur; quia tamen nobis propositum, est lineis, quas adinuenimus, Problematibus omnibus obuiam ire; hanc ob id placuit quoque in medium inuehere, nè ex hac parte defecisse videremur.

Sit igitur æquatio $a^2 + b a = z^2$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica Effectio, dictante Perismate, comparetur. Resoluta in Analogismum, vt par est; fiet vt a + b, ad z, ita z, ad a.

Expoſita ſit recta A B, quæ ſit coefficiens longitudo, eaque intelligatur ad partes B, in infinitum producta; & in ipſa producta ſumantur qualeſcunque partes BC, BD, BE, BF, BG, BH, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H &c. erigantur perpendiculares, & inter AC, BC, media reperiatur proportionalis; item inter A D, B D; item inter A E, B E; inſuper inter A F, B F; item inter AG, BG, inſuper inter A H, BH; & ita deinceps, quibus medijs proportionalibus fiant æquales C K, D L, E M, F N, G O, H P.



Per puncta verò B, K, L, M, N, O, P, intelligatur ducta quadam linea, hæc illa eſt, quæ ad Effectionem prædictam conducit; erit enim rectangulum A C B, æquale quadrato C K, nec diſſimiliter rectangulum A D B, æquale quadrato D L, & ſic de reliquis ſed rectangulum A C B æquale eſt quadrato B C, vnà cum rectangulo A B C; ergo quadratum B C, vnà cum rectangulo A B C, æquabitur quadrato C K, & quadratum B D, vnà cum rectangulo A D B æquabitur quadrato D L, & ita deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea B K L M N O P, vt ſi ex quocunque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, quadratum B Z, vnà cum rectangulo A B Z, æquale ſit quadrato Z Y; quamobrem ſi coefficiens longitudo fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X æqualis rectæ, quæ poſſit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y parallela ipſi A H; ex puncto verò Y, cadat perpendicularis YZ; quadratum B Z, vna cum rectangulo A B Z, æquabitur quadrato Z Y, ſeu B X. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempe B Z, vtpote illa, cuius quadratum vna cum rectangulo A B Z æquatur quadrato B X. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadratum, vnà cum rectangulo ſub eadem, dataque coefficiente longitudine A B, æquale ſit quadrato B X dato comparationis homogeneo.

Hæc igitur eſt geneſis primæ lineæ ex ijs quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.
SECVNDA
Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$$a^3 + b^2 a = b^2 d.$$

Secunda linearum medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus ſit ſatis per æquationem, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^3 + b^2 a = b^2 d$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, ſit vt* $a^2 + b^2$ *ad* b^2, *ità d ad a.*

Expoſita ſit recta A B, cuius quadratum ſit coefficiens planum ſublaterale, eaque intelligatur ad partes B in infinitum protracta; ſumantur qualeſcunque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares. Fiat autem vt quadratum A B ad aggregatum quadratorum A B, B C, ità B C ad ſegmentum in C K; & vt quadratum A B ad aggregatum quadratorum A B, B D, ità B D ad ſegmentum in D L; vt quadratum A B ad aggregatum



gatum quadratorum A B, B E, ità B E, ad ſegmentum in E M; vt quadratum A B, ad aggregatum quadratorum A B, B F, ità B F, ad ſegmentum in F N; vt quadratum A B ad aggregatum quadratorum A B, B G, ita B G, ad ſegmentum in G O; vt quadratum A B, ad aggregatum quadratorum A B, B H, ità B H, ad ſegmentum in H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initio ſunt B, D, E, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt quadratum A B, ad aggregatum quadratorum A B, B C, ità B C, ad ſegmentum in C K, erit conuertendo vt aggregatum quadratorum A B, B C, ad quadratum A B, ità prædictum ſegmentum in C K, ad B C; quamobrem ſolidum ſub B C, in aggregatum quadratorum A B, B C, hoc eſt cubus ex B C, vnà cum ſolido ſub B C, & quadrato A B, æquabitur ſolido abs ſegmento in C K in quadratum A B; & cubus ex B D, vnà cum ſolido ab eadem B D in quadratum A B, æquabitur ſolido abs ſegmento in D L in quadratum A B; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocunque puncto, ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, quadratum B Z, vnà cum quadrato A B, ad quadratum A B, rationem habeat, vt Z Y, ad B Z; atque adeò ſolidum factum abs B Z in planum, quod conſtat duobus quadratis rectarum A B, B Z, æquabitur ſolido facto abs Z Y in quadratum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens planum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X æqualis rectæ, quæ ducta in quadratum A B facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y parallela ipſi A H, ex puncto verò Y cadat perpendicularis Y Z, ſolidum factum abs B Z in planum, quod conſtat duobus quadratis rectarum A B, B Z, hoc eſt cubus B Z, vnà cum ſolido abs eadem B Z in quadratum A B, æquabitur ſolido abs Z Y in quadratum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa cuius cubus, vnà cum ſolido ab eadem B Z, in quadratum A B, æqualis eſt ſolido abs Z Y in quadratum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cum eius cubus vnà cum ſolido ab eadem in quadratum A B æqualis ſit ſolido abs Z Y, hoc eſt B X, in quadratum eiuſdem A B dato comparationis homogeneo.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt geneſis ſecundæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

TERTIA

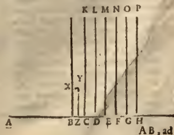
Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^3 + b a^2 = b^2 d.$$

Tertia Medicearum linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus ſit ſatis per æquationem, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^3 + b a^2 = b^2 d$, ad quam analyſis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, ſit vt $a^3 + b a$ ad b^2, ita d, ad a.

Expoſita ſit recta A B, coefficiens longitudo ſub quadratica, eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum, & in ipſa in infinitum, protracta ſumantur qualeſcunque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, erigantur perpendiculares, fiat autem vt quadratum A B, ad aggregatum ex quadrato B C, & rectangulo A B C, hoc eſt ad rectangulum A C B, ità B C ad ſegmentum in C K, deindè vt quadratum A B, ad



A B, ad rectangulum A D B, ità B D, ad segmentum in D L, & vt quadratum A B, ad rectangulum A E B, ità B E ad segmentum in E M; & vt quadratum A B ad rectangulum A F B, ità B F ad segmentum in F N; prætereà vt quadratum A B ad rectangulum A G B, ità B G ad segmentum in G O, & vt quadratum A B ad rectangulum A H B, ità B H ad segmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit. Cùm enim sit, vt quadratum A B, ad rectangulum A C B, ità B C ad segmentum in C K; erit conuertendo, vt rectangulum A C B, ad quadratum A B, ità segmentum in C K ad B C; quamobrem solidum abs B C in rectangulum A C B, hoc est in quadratum B C, vnà cum rectangulo A B C, hoc est cubus ipsius B C, vnà cum solido sub A B in quadratum eiusdem B C, æquabitur solido abs segmento in C K, in quadratum eiusdem A B; & cubus ex B D, vnà cum solido ex A B in quadratum B D, æquabitur solido abs segmento D L in quadratum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta vt si ex quocunque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit quad. BZ, vnà cum rectang. ABZ, hoc est rectangulum A Z B, ad quad. AB vt Z Y ad B Z; atq; adeò solidum factum abs BZ in rectangulum AZB, seu in planum, quod constat quadrato B Z, & rectangulo A B Z, æquabitur solido facto abs Z Y, in quadratum A B; & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens longitudo sub quadratica fuerit recta A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadratum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y cadat perpendicularis Y Z, solidum factum abs B Z in rectangulum A Z B, seu in planum, quod constat quadrato B Z, & rectangulo A B Z, hoc est cubus B Z vnà cum solido ab eiusdem B Z quadrato in longitudinem A B, æquabitur solido abs Z Y in quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius cubus, vnà cum solido ab eiusdem B Z quadrato in longitudinem A B, æqualis est solido abs Z Y, in quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z; cùm eius cubus, vnà cum solido à quadrato eiusdem in longitudinem A B, æqualis sit solido abs Z Y, seu B X, in quadratum eiusdem A B dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est genesis tertiæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVARTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 + b^3 a = b^3 d.$$

QVarta Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectiónem Geómetricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani sub latere, datoque coefficiente solido.

Sit igitur æquatio $a^4 + b^3 a = b^3 d$, ad quam analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^3 + b^3$ ad b^3, ita d, ad a.

Exposita sit recta A B, cuius cubus sit coefficiens solidum sublaterale; eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum, & in ipsa protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, erigatur perpendiculares; fiat autem vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & cubo A B, ità B C, ad segmentum in C k, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B D, & cubo A B, ità B D, ad seg-

K L M N O P
Y
X
A B Z C D E F G H

segmentum in DL, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B E, & cubo A P, ità B E, ad segmentum in E M; & vt cubus A B ad solidum constans cubo B F, & cubo A B, ità B F ad segmentum in F N, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B G, & cubo A B, ità B G ad segmentum in G O; præterea vt cubus A B ad solidum constans cnbo B H & cubo A B, ità B H, ad segmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit. Cum enim sit, vt cubus A P, ad solidum constans cubo B C, & cubo A B ità B C, ad segmentum in C K; erit conuertendo, vt solidum constans cubo B C, & cubo A B, ad cubum A B, ità segmentum in C k, ad B C; quapropter plano-planum factum abs B C, in solidum constans cubo B C, & cubo A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius B C, vnà cum plano-plano abs B C in cubum A B, æquabitur plano-plano abs segmento in C K in cubum A B, & quadrato-quadratum ex B D, vnà cum plano-plano ab eadem B D, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs segmento in D L, in cubum A B; & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum cubo A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad B Z, atque adeò quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano abs B Z, in cubum A B, æquale erit plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrè si coefficiens solidum sublaterale fuerit cubus A B, & in perpendiculari, erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallala ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-planum factum abs B Z, in solidum constans cubo B Z, & cubo A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius B Z, vnà cum plano-plano abs B Z, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum vnà cum plano-plano ab eadem B Z, in cubum A B, æquale est plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix est B Z, cum eius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano ab eadem in cubum A B, æquale sit plano-plano abs Z Y, seu B X, in cubum eiusdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis quartæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVINTA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^4 + b a^3 = b^3 d.$$

Qvinta Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani sub cubo, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^4 + b a^3 = b^3 d$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est fit, vt $a^3 + b a^2$ ad b^3, ità d ad a.



Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo, eaque intelligatur ad partes B, producta in infinitum, & in ipsa protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & solido à quadrato eiusdem B C, in longitudinem A B, ità B C, ad segmentum in C K, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B D, & solido à quadrato B D, in longi-

tudinem

tudinem A B, ità B D, ad ſegmentum in D L, & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B E, , cum ſolido à quadrato B E, in longitudinem A B, ità B E, ad ſegmentum in E M; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B F, & ſolido à quadrato B F, ad longitudinem A B, ità B F ad ſegmentum in F N, & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B G, vnà cum ſolido à quadrato B G, in longitudinem A B, ità B G ad ſegmentum in G O; præterea vt cubus A B ad ſolidum conſtans cubo B H, cum ſolido à quadrato B H, in longitudinem A B, ità B H, ad ſegmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cum enim ſit, vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido à quadrato B C, in longitudinem A B, ità B C, ad ſegmentum in C K; erit conuertendo vt cubus B C, vnà cum ſolido à quadrato B C, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità ſegmentum in C k, ad B C: Quapropter plano-planum factum abs B C, in ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido à quadrato B C, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius B C, vnà cum plano-plano à cubo eiuſdem B C, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento in C K, in cubum A B, & quadrato-quadratum ex B D, vnà cum plano-plano à cubo B D, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius D L, in cubum A B; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea iam dicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum ſolido à quadrato eiuſdem B Z, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad B Z, atque adeò quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano à cubo B Z, in longitudinem A B, æquale erit plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens longitudo ſubcubica fuerit A B, & in perpendiculari, erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallala ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-planum factum abs B Z, in ſolidum conſtans cubo B Z, & ſolido à quadrato eiuſdem B Z, in longitudinem A B, hoc eſt quadrato quadratum ipſius B Z, vnà cum plano-plano à cubo eiuſdem B Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à cubo eiuſdem B Z, in longitudinem A B, æquale eſt plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à cubo eiuſdem in longitudinem A B, æquale ſit plano-plano abs Z Y, ſeu B X, in cubum eiuſdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis quintæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

SEXTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 + b^2 a^2 = b^3 d.$$

SExta Medicearum Linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido.

Sit igitur æquatio $a^4 + b^2 a^2 = b^3 d$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio, dictante Poriſmate, compareretur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt fit, vt* $a^4 + b^2 a$ *ad* b^3, *ità d ad a.*

Expoſita ſit recta A B, cuius quadratum eſt coefficiens planum ſubquadraticum, eaque intelligatur ad partes B, producta in infinitum, & in ipſa producta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, ità B C, ad ſegmentum ipſius C K, & rurſus vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B D, & ſolido ab eadem B D, in quadratum A B, ità B D, ad ſegmentum ipſius D L; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B E, & ſolido ab eadem B E, in quadratum A B, ità B E, ad ſegmentum ipſius E M; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B F, & ſolido ab eadem B F; in quadratum A B, ità B F, ad ſegmentum ipſius F N; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B G, & ſolido ab eadem B G, in quadratum A B, ità B G, ad ſegmentum ipſius G O; & vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B H, & ſolido ab eadem B H, in quadratum A B, ità B H, ad ſegmentum ipſius H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt cubus A B, ad ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, ità B C, ad ſegmentum ipſius C K, erit conuertendo, vt ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, ad cubum A B, hoc eſt cubus B C, vnà cum ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, ad cubum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad B C, &c. quapropter plano-planum factum abs B C, in ſolidum conſtans cubo B C, & ſolido ab eadem B C, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius B C, vnà cum plano-plano à quadrato ipſius B C, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius C K, in cubum A B; & quadrato-quadratum ex B D, vnà cum plano-plano à quadrato eiuſdem B D, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea iam dicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum ſolido ab eadem B Z, in quadratum A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad B Z; atque adeò quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano à quadrato eiuſdem B Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi ſubquadraticum coefficiens planum fuerit quadratum ipſius A B, & in perpendiculari ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z: Plano-planum factum abs B Z, in ſolidum conſtans cubo eiuſdem B Z, & ſolido ab ipſa B Z, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano plano à quadrato eiuſdem B Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à quadrato eiuſdem B Z, in quadratum A B, æquale eſt plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à quadrato eiuſdem in quadratum A B, æquale ſit plano-plano abs Z Y, ſeu B X, in cubum eiuſdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiuſmodi lineæ parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.



Hæc igitur eſt Geneſis ſextæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

SEPTIMA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$a^5 + b^4 a = b^4 d.$

Septima Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-solidi sub latere, datoque coefficiente plano-plano.

Sit igitur æquatio $a_5 + b^4 a = b^4 d$, *ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt* $a^4 + b^4$ *ad* b^4, *ita d, ad a.*

Exposita sit recta A B, cuius quadrato-quadratum sit coefficiens plano-planum sublaterale; eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum, & in ipsa protracta sumantur qualescumque partes BC, BD, BE, BF, BG, BH, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; fiat autem resolutio quadrato quadratorum in simplices longitudines, vt suo loco tradidimus, secundum positam quantitatem. Quadrato-quadratum A B, resolutum sit in longitudinem α, & quadrato-quadratum ex B C, resolutum sit in longitudinem β, & quadrato-quadratum B D, resolutum sit in longitudinem γ; quadrato-quadratum B E, in longitudinem δ, quadrato-quadratum B F, in longitudinem ε quadrato-quadratum B G, in longitudinem ζ, quadrato-quadratum B H, in longitudinem η, & sic deinceps. Deindè ex his duabus α, & β, fiat μ, mox verò fiat, vt α, ad μ, ità B C, ad segmentum ipsius C k, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt B C, ad segmentum ipsius C K, ità α, ad μ; ergo conuertendo erit vt μ ad α, ità segmentum ipsius C K, ad B C, quapropter plano-solidum factum abs β seu B C, in plano planum constans α seu quadrato-quadrato A B, & β seu quadrato-quadrato B C hoc est quadrato-cubus ipsius B C, vnà cum plano-solido ab eadem B C, in quadrato-quadratum ipsius A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius C K, in quadrato-quadratum eiusdem A B; & quadrato-cubus ex B D, vnà cum plano-solido ab eadem B D, in quadrato-quadratum ipsius A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius D L in quadrato-quadratum eiusdem A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta vt si ex quocunque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, erit vt quadrato-quadratum BZ, vnà cum quadrato-quadrato A B, ad quadrato-quadratum A B, ità Z Y ad B Z; atque adeò quadrato-cubus B Z, vnà cum plano-solido ab eadem B Z, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, in quadrato-quadratum A B; & sic de reliquis; Quamobrem si coefficiens plano-planum sublaterale fuerit quadrato-quadratum ipsius A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur BX, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum ipsius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X, agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum abs B Z, in plano-planum constans quadrato-quadrato ipsius B Z, & quadrato-quadrato ipsius A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B Z, vnà cum plano-solido ab eadem B Z, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus, vnà cum



Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

plano-solido ab eadem in quadrato-quadratum A B, æquatur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z; cùm eius quadrato-cubus, vnà cum plano solido ab eadem in quadrato-quadratum A B, æqualis sit plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum eiusdem A B dato comparationis homogeneo.

Hæc igitur est genesis Septimæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

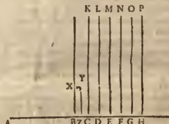
OCTAVA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^5 + b^3 a^2 = b^3 d^2.$$

OCtaua Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-solidi sub quadrato, datoque coefficiente solido.

Sit igitur æquatio $a^5 + b^3 a^2 = b^3 d^2$, *ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica Effectio, dicta ante Perismate, comparetur. Resoluta in Analogismum, vt par est; sit vt* $a^3 + b^3$, *ad* b^3, *ita* d^2 *ad* a^2.



Exposita sit recta A B, cuius cubus sit coefficiens solidum sub quadraticum; eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum; & in ipsa protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & cubo A B, ità quadratum B C, ad quadratum segmenti ipsius C K; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B D, & cubo A B, ità quadratum B D, ad quadratum segmenti ipsius D L; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B E, & cubo A B, ità quadratum B E, ad quadratum segmenti ipsius E M; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B F, & cubo A B, ità quadratum B F, ad quadratum segmenti ipsius F N; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B G, & cubo A B, ità quadratum B G, ad quadratum segmenti ipsius G O; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B H, & cubo A B, ità quadratum B H, ad quadratum segmenti ipsius H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & cubo A B, ità quadratum B C, ad quadratum segmenti ipsius C K; erit conuertendo, vt solidum constans cubo B C, & cubo A B, hoc est cubus B C, vnà cum cubo A B, ad cubum A B, ità quadratum segmenti ipsius C K, ad quadratum B C: Quapropter plano-solidum factum à quadrato B C, in solidum constans cubo B C, & cubo A B; hoc est quadrato-cubus ipsius B C, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem B C, in cubum A B, æquabitur plano-solido à quadrato segmenti ipsius C K, in cubum eiusdem A B: & quadrato-cubus ex B D, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem B D, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato segmenti ipsius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta; vt si ex quocumque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens iam dictæ lineæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum cubo A B, ad cubum A B, ità quadratum Z Y, ad quadratum B Z; atque adeò quadrato-cubus B Z, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem B Z, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis; Quamobrem si sub-

qua-

quadraticum coefficiens solidum fuerit cubus ipsius A B, & in perpendiculari ex puncto B, secetur B X æqualis rectæ, cuius quadratum ductum in cubum A B, facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H; ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum abs quadrato B Z, in solidum constans cubo B Z, & cubo A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B Z, vna cum plano solido à quadrato eiusdem B Z, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, hoc est quadrato B X, in cubum A B; Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpote illa, cuius quadrato-cubus, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem B Z, in cubum A B, æquatur plano-solido abs quadrato Z Y, hoc est quadrato B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-cubus, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem in cubum A B, æqualis sit plano-solido abs quadrato Z Y, seu quadrato B X, in cubum eiusdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ nuxtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis Octauæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

NONA

Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^5 + b^2 a^3 = b^3 d^2.$$

NOna Medicearum Linea ad Geometricam effectionem conducit Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-solidi sub cubo, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^5 + b^2 a^3 = b^3 d^2$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate compareat. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^3 +$ $b^2 a$, ad b^3, ità d^2 ad a^2.



Exposita sit recta A B, cuius quadratum sit coefficiens planum, subcubicumque intelligatur ad partes B; in infinitum protracta, & in ipsa producta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & solido abs B C, in quadratum A B, ità quadratum B C, ad quadratum segmenti ipsius C K; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B D, & solido abs B D, in quadratum A B, ità quadratum B D, ad quadratum segmenti ipsius D L; Deindè vt cubus B E, ad solidum constans cubo B E, & solido abs B E, in quadratum A B, ità quadratum B E, ad quadratum segmenti ipsius E M; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B F, & solido abs B F, in quadratum A B, ità quadratum B F, ad quadratum segmenti ipsius F N; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B G, & solido abs B G, in quadratum A B, ità quadratum B G, ad quadratum segmenti ipsius G O, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B H, & solido abs B H, in quadratum A B, ità quadratum B H, ad quadratum segmenti ipsius H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa est, quæ ad effectionem prædictam conducit; Cùm enim sit vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & solido abs B C, in quadratum A B, ità quadratum B C, ad quad. segmenti ipsius C K; erit conuertendo, vt solidum constans cubo B C, & solido abs B C, in quadratum A B, ad cubum A B, ità quadratum segmenti ipsius C K, ad quadratum B C; quamobrem plano-solidum abs B C, quadrato in solidum constans cubo B C, & solido abs B C, in quadratum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B C, vnà

cum

cum plano-solido abs cubo B C, in quadratum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato segmenti ipsius C K, in cubum A B; & quadrato-cubus abs B D, vnà cum plano-solido eiusdem B D, cubi in quadratum A B, æquabitur plano-solido ex quadrato segmenti ipsius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est Linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, quadrato-cubus B Z, vnà cum plano-solido ex cubo B Z, in quadratum A B, fit æqualis plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens planum subcubicum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis el, cuius quadratum ductum in cubum ipsius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z; plano-solidum factum abs quadrato B Z, in solidum constans cubo B Z, & solido ab eadem B Z, in quadratum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B Z, vnà cum plano-solido ab eiusdem B Z, cubo, in quadratum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato cubus, vnà cum plano-solido ab eiusdem B Z cubo, in quadratum A B, æqualis est plano-solido abs Z Y, hoc est B X, quadrato, in cubum ipsius A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-cubus, vnà cum plano-solido ab eiusdem cubo in quadratum A B, æqualis sit plano-solido ex Z Y, hoc est B X, quadrato, in cubum A B, dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi lineæ paralela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis nonæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

DECIMA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^5 + b a^4 = b^4 d.$$

DEcima Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-solidi sub quadrato-quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^5 + b a^4 = b^4 d$, ad quam analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^4 + b a^3$ ad b^4, ita d, ad a.

Exposita sit recta A B, quæ sit coefficiens longitudo subquadrato-quadratica, eaque intelligatur in infinitum ad partes B, protracta, & in hac ipsa protracta sumantur qualescunque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares, Deindè quadrato-quadratum ipsius A B, resoluatur in longitudinem α, mox verò quadrato-quadratum B C, resoluatur in longitudinem β, & plano-planum sub cubo B C, & longitudine A B, resoluatur in longitudinem γ; item quadrato-quadratum B D, in longitudinem δ; & plano-planum sub B D, cubo, & longitudine A B, in longitudinem ϵ, & sic de reliquis; vt autem α ad β, plus γ, ita fiat B C, ad segmentum ipsius C K; & vt α, ad δ, plus ϵ, ità fiat B D, ad segmentum ipsius D L, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt α ad β plus γ, ità B C, ad segmentum ipsius C K, erit conuertendo vt β plus γ ad α, hoc est quadrato-



qua-

quadratum B C, plus plano-plano à cubo eiusdem B C, in longitudinem A B, ad quadrato-quadratum A B, ità segmentum ipsius C K, ad B C; erit ob id plano-solidum factum abs B C, in plano planum constans quadrato-quadrato B C, & plano-plano ex cubo B C, in longitudinem A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B C, plus plano-solido abs quadrato-quadrato B C, in longitudinem A B, æqualis plano-solido abs segmento ipsius C K, in quadrato-quadratum A B; & quadrato-cubus B D, vnà cum plano-solido à quadrato-quadrato eiusdem B D, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius D L, in quadrato-quadratum A B; & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta, vt si ex quocunque puncto, ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, erit vt quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano abs cubo B Z, in longitudinem A B, ad quadrato-quadratum A B, ita Z Y, ad B Z; atque adeò quadrato-cubus ex B Z, vnà cum plano-solido ex quadrato-quadrato B Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens longitudo subquadrato-quadratica fuerit A B, & in perpendiculari ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum A B facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto autem Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum abs B Z, in plano-planum constans quadrato-quadrato B Z, & plano-plano abs cubo B Z, in longitudinem A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B Z, vnà cum plano-solido abs quadrato-quadrato eiusdem B Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus, vnà cum plano-solido abs quadrato-quadrato eiusdem B Z, in longitudinem A B, æquatur plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix est B Z, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis decimæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

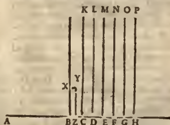
Secundum Genus Linearum MEDICEARVM, *& ad huiusmodi genus pertinentium*,

PRIMA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit $a^2 - ba = z^2$.

DEcima prima Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem in qua quadratum afficitur multa plani sublatere, dataque coefficiente longitudine; Etsi autem idem circuli beneficio consequi licet, ob eam tamen, quam attulimus causam de prima differentes linea placet hanc pariter adsciscere.

Sit igitur æquatio $a^2 - ba = z^2$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est fit, vt $a - b$ ad z, ita z ad a.



Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo, & in hac ad partes B, in infinitum protracta acceptæ sint qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ità deinceps. Ex punctis verò B, C, D, E, F, G, H, perpendicularibus erectis, fiat vt A C, ad segmentum ipsius C K, ità prædictum segmentum eiusdem C K, ad B C, & vt A D, ad segmentum ipsius D L, ità hoc idem segmentum ad B D, & vt A E, ad segmentum ipsius E M, ita hoc idem segmentum ad B E, & vt A F, ad segmentum ipsius F N, ita hoc idem segmentum ad F B, & vt A G, ad segmentum ipsius G O; ita hoc idem segmentum ad B G, & vt A H, ad segmentum ipsius H P, ità hoc idem segmentum ad B

N, &

N, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit vt A C, ad segmentum ipsius C K, ita hoc idem segmentum ad C B, & vt A D, ad segmentum ipsius D L, ità hoc idem segmentum ad D B, & sic de reliquis, rectangulum A C B, æquabitur quadrato segmenti ipsius C K, & rectangulum A D B, æquabitur quadrato segmenti ipsius D L, &c. Sed rectangulum A C B, est æquale quadrato A C, minus rectangulo C A B; ergo quadratum A C, minus rectangulo C A B, æquabitur quadrato segmenti ipsius C K, & quadratum A D, minus rectangulo D A B, æquabitur quadrato segmenti ipsius D L, & ità deinceps. Huiusmodi igitur Indolis est linea prædicta, vt si ex quocumq; puncto ex. gr. Z, perpendicularis quædam erigatur Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, quadratum A Z, minus rectangulo Z A B, æquale sit quadrato Z Y. Quamobrem si coefficiens longitudo fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B secetur B X, æqualis rectæ, quæ possit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, quadratum A Z, minus rectangulo Z A B, æquabitur quadrato Z Y, seu B X. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadratum minus rectangulo sub eadem, dataque coefficienter longitudine A B, æquale est quadrato B X, dato comparationis homogeneo. Propositæ igitur æquationis radix est B Z, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc itaque est Genesis Lineæ Decimæ Primæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad Secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

SECVNDA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^3 - b^2 a = b^2 d.$$

Decima secunda Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus sit satis per æquationem, in qua cubus multa multa solidi sub latere, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$; ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur; Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^2 - b^2$ ad b^2, ita d ad a.



Exposita sit recta A B, cuius quadratum sit coefficiens planum sublaterale, & in ea ad partes B, in infinitum protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A C, ità A C, ad segmentum ipsius C K, & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A D, ità fiat A D, ad segmentum ipsius D L; & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum A B, superatur à quadrato A E, ità fiat A B, ad segmentum ipsius E M; & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A F, ità A F, ad segmentum ipsius F N; & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A G, ità A G, ad segmentum ipsius G O; & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A H, ità A H, ad segmentum ipsius H P, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, E, &c. intelligatur ducta quædam Linea, hæc illa

illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A C, ità A C ad segmentum ipsius C K; erit conuertendo, vt quadratum A C, minus quadrato A B, ad quadratum A B, ità segmentum ipsius C K, ad A C: quamodrem solidum sub A C, in quadratum A C, minus quadrato A B; hoc est cubus ex A C, minus solido ab eadem A C, in quadratum A B, æquabitur solido abs segmento ipsius C K, in quadratum A B: & cubus ex A D, minus solido ab eadem A D, in quadratum A B, æquabitur solido abs segmento ipsius D L, in idem quadratum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta; vt si ex quocumque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens iam dictæ lineæ in puncto Y, quadratum A Z, minus quadrato A B, ad quadratum A B, habeat rationem, vt Z Y, ad A Z; atque adeò solidum factum abs A Z, in planum, quo quadratum A B, superatur à quadrato A Z, hoc est cubus ex A Z, minus solido ex A Z, in quadratum A B, æquabitur solido facto abs Z Y, in quadratum A B, & sic de reliquis; Quamobrem si coefficiens planum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, quæ ducta in quadratum A B, facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, solidum factum abs A Z, in planum, quo quadratum A B, superatur à quadrato A Z, hoc est cubus A Z, minus solido ab eadem A Z, in quadratum A B, æquabitur solido abs Z Y, in quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius cubus multatus solido ab eadem A Z, in quadratum A B, æqualis est solido abs Z Y, in quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix est A Z, cùm eius cubus &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis Decimæ secundæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello

Ad secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

TERTIA

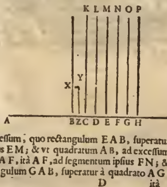
Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^3 - b a^2 = b^2 d.$$

Decima tertia Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Cubus afficitur multa solidi sub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^3 - b a^2 = b^2 d$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^2 - b a$, ad b^2, ità d ad a.

Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo subquadratica, & in ea ad partes B, protracta in infinitum sumantur quaelscumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat verò vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum C A B, superatur à quadrato A C, ita A C, ad segmentum ipsius C K; & vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum D A B, superatur à quadrato A D, ità A D, ad segmentum ipsius D L; & vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum E A B, superatur à quadrato A E, ità A E, ad segmentum ipsius E M; & vt quadratum A B, ad excessum quo rectangulum F A B superatur à quadrato A F, ità A F, ad segmentum ipsius F N; & vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum G A B, superatur à quadrato A G,



ità A G, ad segmentum ipsius G O; & vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum H A B, superatur à quadrato A H, ita A H, ad segmentum ipsius H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum C A B, superatur à quadrato A C, ita A C, ad segmentum ipsius C K; erit conuertendo, vt excessus, quo quadratum A C, superat rectangulum C A B, ad quadratum A B, ità segmentum ipsius C K, ad A C; & sic de reliquis; quamobrem solidum abs A C, in excessum, quo quadratum A C, superat rectangulum C A B, hoc est in quadratum A C, minus rectangulo C A B, hoc est cubus ipsius A C, minus solido sub A B, in quadratum eiusdem A C, æquabitur solido abs segmento ipsius C K, in quadratum ipsius A B, & cubus ex A D, minus solido sub A B, in quadratum ipsius A D, æquabitur solido abs segmento ipsius D L, in quadratum eiusdem A D, & ità deinceps. Huiusmodi igitur Indolis est Linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, sit quadratum A Z, minus rectangulo Z A B, ad quadratum A B, vt Z Y, ad A Z; atque adeò solidum factum abs A Z, in excessum, quo quadratum A Z, superat rectangulum Z A B, hoc est cubus A Z, minus solido A B, in quadratum A Z, æquabitur solido facto abs Z Y, in quadratum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens longitudo subquadratica fuerit recta A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadratum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, solidum abs A Z, in excessum, quo quadratum A Z, superat rectangulum Z A B, hoc est cubus ex A Z, minus solido ab eiusdem A Z, quadrato, in longitudinem A B, æquabitur solido abs Z Y, quadratum A B; Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius cubus, minus solido ab eiusdem A Z, quadrato in longitudinem A B, æqualis est solido abs Z Y; in quadratum A B; Propositæ igitur æquationis radix erit A Z, cùm eius cubus, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis Decimæ tertiæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVARTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 - b^3 a = b^3 d.$$

Decima Quarta Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani sub latere, datoque coefficiente solido.

Sit igitur æquatio $a^4 - b^3 a = b^3 d$, *ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica Effectio, dictante Porismate, compareatur. Resoluta in Analogismum, vt par est; fit vt* $a^3 - b^3$, *ad* b^3, *ita d ad a.*

Exposita

Exposita sit recta A B, cuius cubus sit coefficiens solidum sublaterale, & in ea ad ad partes B, in infinitum; protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad excessum, quo cubus idem superatur à cubo A C, itá A C, ad segmentum ipsius C K, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus idem superatur à cubo AD, itá AD, segmentum ipsius D L; & vt cubus A B, ad excessum, quo idem cubus superatur à cubo A E, ita A E, ad segmentum ipsius E M, & vt cubus A B, ad excessum quo idem cubus superatur à cubo A F, itá A F, ad segmentum ipsius F N; & vt cubus A B, ad excessum, quo idem cubus superatur à cubo A G, itá A G, ad segmentum ipsius G O, & vt cubus A B, ad excessum, quo idem cubus superatur à cubo A H, ita A H, ad segmentum ipsius H P; & itá deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit vt cubus A B, ad excessum, quo idem cubus superatur à cubo A C, itá A C, ad segmentum ipsius C K; erit conuertendo, vt huiusmodi excessus, quo scilicet cubus A C, superat cubum A B, ad cubum A B, itá segmentum ipsius C K, ad A C: quapropter plano-planum factum abs A C, in solidum, quod est excessus, quo cubus A C, superat cubum A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius A C, minus plano-plano ex A C, in cubum A B, æquabitur plano plano ab segmento ipsius C K, in cubum A B, & quadrato-quadratum ex A D, minus plano-plano ab eadem A D, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius D L, in cubum A B, & itá deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, erit vt cubus A Z, minus cubo A B, ad cubum A B, itá Z Y ad A Z; atque adeò quadrato-quadratum A Z, minus plano plano ab eadem A Z, in cubum A B, æquale erit plano-plano abs Z Y, in cubum A B; & itá de reliquis; Quamobrem si coefficiens solidum sublaterale fuerit cubus A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X, agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-planum factum ab AZ, in solidum, quod est excessus, quo cubus A Z, superat cubum A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius A Z, minus plano-plano ab A Z, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum minus plano-plano ab eadem A Z, in cubum A B, æquale est plano-plano ab Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix est A Z, cum eius quadrato-quadratum, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis lineæ decimæquartæ ex ijs, quas adinueni, quasque Meceas appello.

Ad secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVINTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 - b a^3 = b^3 d.$$

Decima quinta Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani sub cubo, dataque coefficiente longitudine.

 Sit

Sit igitur æquatio $a^4 - ba^3 = b^3 d$, ad quam analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dicta ante Perismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^3 - ba$ ad b^3, ita d ad a.



Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo subcubica, & in ea ad partes B, in infinitum protracta, sumantur qualescumque partes BC, BD, BE, BF, BG, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; fiat autem vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A C, in A B, longitudinem, superatur à cubo ipsius A C, ità A C, ad segmentum ipsius C k, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A D, in longitudinem A B, superatur à cubo ipsius A D, ità A D, ad segmentum ipsius D L, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A E, in longitudinem A B; superatur à cubo ipsius A E, ità A E, ad segmentum in E M, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A F, in longitudinem AB, superatur à cubo A F, ità A F, ad segmentum ipsius F N, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A G, in longitudinem A B, superatur à cubo A G, ità A G, ad segmentum ipsius G O, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A H, in longitudinem A B, superatur à cubo A H, ità A H, ad segmentum ipsius H P, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A C, in longitudinem A B, superatur à cubo A C, ità A C, ad segmentum ipsius C K, erit conuertendo, vt huiusmodi excessus, quo cubus A C, superat solidum à quadrato A C, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità segmentum ipsius C K, ad A C, quapropter plano-planum factum ab A C, in solidum, quod est excessus, quo cubus A C, superat solidum à quadrato A C, in longitudinem A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius A C, minus plano-plano à cubo A C, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius C K, in cubum A B, & quadrato-quadratum ex A D, minus plano-plano à cubo A D, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est Linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, fit vt cubus A Z, minus solido à quadrato eiusdem A Z, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad A Z, atque adeò quadrato-quadratum A Z minus plano-plano à cubo A Z, in longitudinem A B, æquale sit plano-plano ab Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens longitudo subcubica fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z; plano-planum factum abs A Z, in excessum, quo cubus A Z, superat solidum à quadrato eiusdem A Z, in longitudinem A B, hoc est quadrato-quadratum eiusdem A Z, minus plano-plano à cubo ipsius A Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum minus plano-plano à cubo ipsius A Z, in longitudinem A B, æquale est plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit A Z, cùm eius quadrato-quadratum minus, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis Lineæ Decimæquintæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello,

Ad

Ad secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

SEXTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$a^4 - b^2 a^2 = b^3 d$.

DEcima sexta Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani sub plano, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^4 - b^2 a^2 = b^3 d$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, compareatur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^4 - b^2 a^2$ ad b^3, ità d, ad a.



Exposita sit recta A B, cuius quadratum sit coefficiens planum subquadraticum, & in hac ad partes B, in infinitum protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, BE, BF, BG, BH, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erectis perpendicularibus, fiat, vt cubus A B, ad excessum, quo cubus *A* C, superat solidum ab eadem *A* C, in quadratum A B, ità *A* C, ad segmentum ipsius C K; & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus *A* D, superat solidum ab eadem *A* D, in quadratum *A* B, ità *A* D, ad segmentum ipsius D L, & vt cubus *A* B, ad excessum, quo cubus *A* E, superat solidum ab eadem *A* E, in quadratum *A* B, ità *A* E, àd segmentum ipsius E M, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A F, superat solidum ab eadem A F, in quadratum A B, ità A F, ad segmentum in F N, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A G, superat solidum ab eadem A G, in quadratum A B, ità A G, ad segmentum in G O, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A H, superat solidum ab eadem A H, in quadratum A B, ità A H, ad segmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità A C ad segmentum ipsius C K, erit conuertendo vt huiusmodi excessus, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità segmentum ipsius C K, ad A C, quapropter plano-planum factum abs A C, in excessum quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius A C, minus plano-plano à quadrato eiusdem AC, in quadratũ AB, æquabitur plano-plano abs CK, in cubum A B; & quadrato-quadratum ex A D, minus plano-plano a quadrato eiusdem A D, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur Indolis est Linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. *Z*, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto *Y* sit vt cubus A *Z*, minus solido ab eadem A *Z*, in quadratum A B; ad cubum A B, ità *Z Y*, ad A *Z*, atque adeò quadrato-quadratum A *Z*, minus plano-plano à quadrato eiusdem A *Z*, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs *Z Y*, in cubum A B, & sic de reliquis; quamobrem si subquadraticum coefficiens planum fuerit quadratum ipsius A B, & in perpendiculari ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X, agatur X *Y*, parallela ipsi A H, ex puncto verò *Y* cadat perpendicularis *Y Z*; plano-planum factum abs A *Z*, in excessum, quo cubus A *Z*, superat solidum ab eadem A *Z*, in quadratum A B, hoc est quadrato-quadratum A *Z*, minus plano-plano à quadrato eiusdem A *Z*, in quadratum A B, æquabitur plano-plano

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

no-plano abs $Z\,Y$, hoc est B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quad, minus plano-plano à quadrato eiusdem A Z, in quadratum A B, æquale est plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit A Z, cum eius quadrato-quadratum minus plano plano &c.

Hæc igitur est Genesis Lineæ Decimasextæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

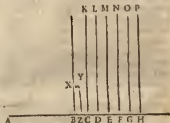
SEPTIMA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit,

$$a^5 - b^4 a = b^4 d,$$

Decima septima Linearum Medicearum est, quæ facit ad Geometricam effectionem Problematum, quibus fit satis per æquationem in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-solidi sub latere, datoque coefficiente plano-plano.

Sit igitur æquatio $a^5 - b^4 a = b^4 d$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^4 - b^4$ ad b^4, ita d ad a.



Exposita sit quædam recta AB, cuius quadrato-quadratum est coefficiens plano-planum sublaterale, & in ea ad partes B, in infinitum protracta sumantur qualescumque partes BC, BD, BE, BF, BG, BH, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erectis perpendicularibus; Fiat resolutio quadrato-quadratorum in simplices longitudines, vt suo loco tradidimus, secundum positam quantitatem, & quidem quadrato-quadratum ex A C, resolutum sit in longitudinem α, & quadrato-quadratum A D, in longitudindem γ, quadrato-quadratum A E, in longitudinem δ, quadrato-quadratum A F, in longitudinem ϵ quadrato-quadratum A G, in longitudinem ξ quadrato-quadratum A H, in longitudinem η, & sic deinceps. Quadrato-quadratum A B, resolutum sit in longitudinem β, deindè differentia inter α, & β, sit μ, mox verò fiat, vt β, ad μ, ità A C, ad segmentum ipsius C K, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt A C, ad segm. in C K, ità β, ad μ, ergo conuertendo erit, sit μ, ad β, ità segm. in C K, ad A C, quapropter plano-solidum factum ab A C, in μ plano-planum, quo α superat β, seu quadrato-quadr. A C, superat quadrato-quadratum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A C, minus plano-solido ab eadem A C, in quadrato-quadratum ipsius A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius C K, in quadrato-quadratum eiusdem A B; & quadrato-cubus ex A D, minus plano-solido ab eadem A D, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius D L, in quadrato-quadratum eiusdem A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit vt quadrato quadratum $A\,Z$, minus quadrato-quadrato A B, ad quadrato-quad. A B, ità Z Y, ad A Z; atque adeò quadrato-cubus A Z, minus plano-solido ab eadem A Z, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, in quadrato-quadratum A B, & sic de reliquis. Si ergo coefficiens plano-planum sublaterale fuerit quadrato-quad. ipsius A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum ipsius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z: Plano-solidum factum

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ maxime descriptæ, in puncto Y.

factum abs A Z, in excessum, quo quadrato-quadratum A Z, superat quadrato-quadratum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A Z, minus plano-solido ab eadem A Z, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-solido ab eadem in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit A Z, cùm eius quadrato-cubus minus plano-solido ab eadem in quadrato-quadratum A B, æqualis sit plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum A B, dato comparationis homogeneo. Propositæ igitur æquationis radix est A Z, &c.

Hæc igitur est Genesis Lineæ Decimæseptimæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

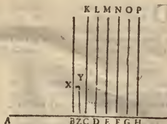
Ad Secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

OCTAVA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit
$a^5 - b^3 a^2 = b^3 d^2$.

DEcima octaua Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-solidi sub quadrato, datoque coefficiente solido.

Sit igitur æquatio $a^5 - b^3 a^2 = b^3 d^2$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est fit, vt $a^3 - b^3$ ad b^3, ita d^2 ad a^2.



Exposita sit recta A B, cuius cubus sit coefficiens solidum subquadraticum, & in ea ad partes B, in infinitum protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, erigantur perpendiculares; fiat autem vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A C, superat cubum A B, ità quadratum A C, ad quadratum segmenti ipsius C K, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A D, superat cubum A B, ità quadratum A D, ad quadratum segmenti ipsius D L; & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A E, superat cubum A B, ità quadratum A E, ad quadratum segmenti ipsius E M; & vt cubus A B, ad excessum, A F, superat cubum A B, ità quadratum A F; ad quadratum segmenti ipsius F N; & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A G, superat cubum A B, ità quadratum A G, ad quadratum segmenti ipsius G O; & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A H, superat cubum A B, ità quadratum A H, ad quadratum segmenti ipsius H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum extrema sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam Linea; hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cum enim sit, vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A C, superat cubum A B, ità quadratum A C, ad quadratum segmenti ipsius C K, erit conuertendo, vt huiusmodi excessus, quo cubus A C, superat cubum A B, hoc est cubus A C, minus cubo A B, ad cubum A B, ità quadratum segmenti ipsius C K, ad quadratum A C, quapropter plano-solidum factum à quadrato A C, in excessum quo cubus A C, superat cubum A B; hoc est quadrato-cubus ipsius A C, minus plano-solido à quadrato eiusdem A C, in cubum A B, æquabitur plano-solido à quad. segmenti C K, in cubum A B; & quadrato-cubus ex A D, minus plano-solido à quadrato eiusdem A D, in cubum A B, æquabitur plano-solido à quad. segmenti D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta,

vt si

vt si ex quocumque puncto, ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, erit vt cubus A Z, minus cubo A B, ad cubum A B, ita quadratum Z Y, ad quadratum A Z; atque adeò quadrato-cubus A Z, minus plano-solido à quadrato eiusdem A Z, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si subquadraticum coefficiens solidum fuerit cubus ipsius A B, & in perpendiculari ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, cuius quadratum ductum in cubum A B facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto autem Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum abs quadrato A Z, in excessum, quo cubus A Z, superat cubum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A Z, minus plano-solido à quadrato eiusdem A Z, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, hoc est quadrato B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-solido à quadrato eiusdem A Z, in cubum A B, æquatur plano-solido abs quadrato Z Y, hoc est quadrato B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix est A Z, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligatur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis decimæ octauæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello,

Ad secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

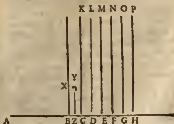
N O N A

Pro effectione Geometricâ, cùm Æquatio fuerit

$$a^5 - b_2 a^3 = b_3 d_2.$$

DEecima noua Medicearum Linearum est, quæ facit ad Geometricam effectionem Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-solidi sub cubo, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^5 - b^2 a^3 = b^3 d^2$, ad quam analysis conduxit, vt eâ explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^2 - b^2$, ad b^3, ità d^2 ad a^3.



Exposita sit recta A B, cuius quadratum sit coefficiens planum subcubicum, & in ea ad partes B, in infinitum protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità quadratum A C, ad quadratum segmenti ipsius C K, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A D, superat solidum ab eadem A D, in quadratum A B, ità quadratum A D, ad quadratum segmenti ipsius D L, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A E, superat solidum ab eadem A E, in quadratum A B, ita quadratum A E, ad quadratum segmenti ipsius E M, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A F, superat solidum ab eadem A F, in quadratum A B, ita quadratum A F, ad quadratum segmenti ipsius F N, & vt cubus A B, excessum, quo cubus A G, superat solidum ab eadem A G, in quadratum A B, ità quadratum A G, ad quadratum segmenti ipsius A O, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A H, superat solidum ab eadem A H, in quadratum A B, ita quadratum A H, ad quadratum segmenti ipsius H P, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentum quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadra-

quadratum A B, ità quadratum A C, ad quadratum ſegmenti ipſius C K; erit conuertendo vt huiuſmodi exceſſus, quo cubus A C, ſuperat ſolidum ab eadem A C, in quadratum A B, hoc eſt cubus A C, minus ſolido ab eadem A C, in quadratum A B, ad cubum A B, ità quadratum ſegmenti ipſius C k, ad quadratum A C, quamobrem plano-ſolidum factum à quadrato A C, in cubum A C, minus ſolido ab eadem A C, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius A C, minus plano-ſolido ab ipſius A C, cubo in quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius C K, quadrato in cubum A B, & quadrato-cubus ex A D, minus plano-ſolido ab eiuſdem A D, cubo in quadratum A B, æquabitur plano-ſolido à quadrato ſegmento ipſius D L, in cubum A B; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, quadrato-cubus A Z, minus plano-ſolido ex cubo A Z, in quadratum A B, æqualis ſit plano-ſolido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens planum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari, erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis ei cuius quadratum ductum in cubum ipſius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallala ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-ſolidum factum abs quadrato A Z, in cubum A Z, minus ſolido ab eadem A Z, in quadratum A B, hoc eſt quadrato-cubus ipſius A Z, minus plano-ſolido ab eiuſdem A Z, cubo in quadratum A B, æquabitur plano-ſolido abs quadrato Z Y, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato cubus minus plano-ſolido ab eiuſdem A Z, cubo in quadratum A B, æqualis eſt plano-ſolido abs Z Y, ſeu B X, quadrato in cubum ipſius A B. Propoſitæ igitur æquationis radix erit A Z, cùm eius quadrato-cubus minus plano-ſolido &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis Decimæ nonæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad Secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

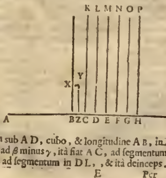
DECIMA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^5 - b a^4 = b^4 d.$$

VIgeſima Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-ſolidi ſub quadrato-quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^5 - b a^4 = b^4 d$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate comparetur; Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt* $a^4 - b a^3$ *ad* b^4, *ita d ad a.*



Expoſita ſit recta A B, coefficiens longitudo ſubquadratica, in qua ad partes B, in infinitum protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; deindè quadrato-quadratum ipſius A B, reſoluatur in longitudinem α, mox verò quadrato-quadratum A C, reſoluatur in longitudinem β, & plano-planum ſub cubo A C, & longitudine A B, reſoluatur in longitudinem γ, item quadrato-quadratum A D, in longitudinem δ, & plano-planum ſub A D, cubo, & longitudine A B, in longitudinem ε, & ſic de reliquis. Vt autem α ad β minus γ, ità fiat A C, ad ſegmentum ipſius C K, & vt α ad δ, minus ε, ità fiat A D, ad ſegmentum in D L, , & ità deinceps.

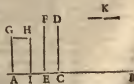
Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit vt α, a l β, minus γ, ita A C, ad segmentum ipsius C K, erit conuertendo, vt β, minus γ, ad α, hoc est quadrato-quadratum A C, minus plano plano ex cubo eiusdem A C, in longitudinem A B, ad quadrato-quadratum A B, ita segmentum ipsius C K, ad A C, ob id plano-solidum factum abs A C, in excessum, quo quadrato-quadratum A C, superat plano-planum à cubo eiusdem A C, in longitudinem A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A C, minus plano-solido à quadrato-quadrato A C, in longitudinem A B, æqualis est plano-solido abs segmento ipsius C K, in quadrato-quadratum A B, & quadrato-cubus AD, minus plano-solido à quadrato-quadrato eiusdem AD, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius D L, in quadrato-quadratum A B; & ità deinceps. Huiusmodi igitur Indolis est linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, sit vt quadrato-quadratum A Z, minus plano-plano abs cubo AZ, in longitudinem AB, &c. ad quadrato-quadratum A B, ita Z Y, ad A Z, quamobrem quadrato-cubus A Z, minus plano-solido à quadrato-quadrato A Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum A B; Quamobrem si coefficiens longitudo subquadrato-quadratica fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum ab A Z, in excessum, quo quadrato-quadratum A Z, superat plano-planum à cubo eiusdem A Z, in longitudinem A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A Z, minus plano-solido à quadrato-quadrato eiusdem A Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B; Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-solido à quadrato-quadrato eiusdem A Z, in longitudinem A B, æquatur plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum A B, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc itaque est Genesis Lineæ Vigesimæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Tertium Genus Linearum MEDICEARUM, *& ad huiusmodi genus pertinentium*
PRIMA
Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$ba - a^2 = z^2.$$



Data sit coefficiens A B, & K, possit comparationis homogeneum. Diuidatur A B, bifariam in C, & ex C, erigatur perpendicularis C D, ea lege vt sit quemadmodum A C, ad C D, ita C D, ad C B. Manifestum est rectangulum A C B, esse maximum omnium ad eandem rectam applicabilium deficientium quadrato; & defectum occupare reliquum dimidium lineæ. Itemque constat rectangulum A C B, æquale esse quadrato C D. Mox autem assumpto quouis puncto E, ex E, excitetur E F, ea lege vt sit quemadmodum A E, ad E F, ita E F, ad E B. Et sic deinceps procedatur assumptis alijs punctis in recta A B; & erectis perpendicularibus eodem modo per quarum extremitates intelligatur ducta quædam linea. Deinde ex A, excitata perpendiculari A G, quæ sit æqualis ipsi K, quæ potest comparationis homogeneum & ex G, agatur G H, parallela ipsi A B, occurrens prædictæ lineæ in H, ex H, cadat H I, perpendicularis ad A B; Dico I B, esse propositæ æquationis Radicem; est enim rectangulum A I B, æquale quadrato H I, seu K, at verò rectangulum prædictum est idem quod rectangulum A B I, minus quadrato I B; quare rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale erit K, quadrato.

Hæc

Hæc autem linea cum circuli peripheria coincidit; est enim rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale rectangulo A I B; si igitur rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale est quadrato K, & rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale est rectangulo A I B, ergo rectangulum A I B, æquabitur quadrato K, seu A G, seu I H; & quoniam idem contingit de omnibus rectis excitatis ex singulis punctis rectæ A B, propterea linea A D B, circuli peripheria erit.

Hoc idem intelligi potest de A I, rectangulum enim B A I, minus quadrato A I, æquale est rectangulo A I B, &c.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

SECVNDA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit.

$$b a^2 - a^3 = b^2 d.$$

Data sit coefficiens A B, & K, sit recta, cuius cubus æqualis sit comparationis homogeneo. Secetur autem ipsa A B, in C, itaut A C, sit tertia pars ipsius A B. Excitetur ex C, recta quæpiam C D; ita, vt sit quemadmodum A C, ad C D, ita quadratum C D, ad quadratum C B. Manifestum est maximum solidum esse, quod applicatur alicui lineæ deficiens cubo, esse inquam id, quod tertiæ parti datæ lineæ applicatur, & cubus adiacet duabus tertijs partibus datæ rectæ. Quamobrem solidum sub altitudine A C, & sub quadrato C B, omnium applicabilium ad rectam A B, defficientium cubo ex C B, erit maximum. Constat itidem solidum prædictum æquale esse cubo ex C D.



Deinde sumatur punctum E; & fiat, vt A E, ad E F, ita quadratum E F, ad quadratum E B. Non dissimiliter procedatur deinceps acceptis alijs punctis in A B, & excitatis ad eam perpendicularibus, per quarum extrema intelligatur ducta linea quædam, quæ hoc pacto descripta erit per puncta continuata. Deinde ad extremitatem A, excitetur perpendicularis A G, æqualis K, agaturque G H, parallela ipsi A B, occurrens lineæ iam descriptæ in H, & ex H, cadat H I, perpendicularis ad A B. Dico I B, esse æquationis radicem. Solidum enim sub A B, coefficiente, & quadrato I B, minus cubo eiusdem I B, hoc est solidum sub altitudinem A I, & quadrato I B, æquale est cubo I H, seu A G, hoc est K. Quod oportebat &c.

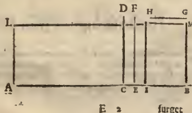
Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

TERTIA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$b^2 a - a^3 = b^2 d.$$

Datum sit planum A L M B, cuius latus vnum A B, aliud B M, secetur A B, in C, vt C B, sit tertia pars totius A B, igitur vel C B, tertia pars est æqualis B M, vel in æqualis. Si fuerit inæqualis, Quandoquidem vtcunque se habeat certè segmentum C M, tertia pars est totius M A, reperiatur recta quæ possit ipsum planum CM, & ad hanc applicetur totum A M, con-



ſurget enim latus A B, triplum rectæ potentis C M, tertiam partem totius A M. Ex puncto C, excitetur C D, itaut ſit quemadmodum L C, duæ tertiæ partes totius A M, ad quadratum C D, ita C D, ad C B. Manifeſtum eſt maximum ſolidum omnium applicabilium dato plano defficientium cubo, eſſe id, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani. Quare ſolidum prædictum erit maximum, nempè contentum ſub plano L C, & altitudine C B,

Conſtat præterea cubum C D, prædicto ſolido æqualem eſſe.

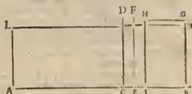
Sumatur in A B, quoduis aliud punctum E, & ex E, excitetur E F, itaut quemadmodum eſt planum A M, minus quadrato E B, ad quadratum E F, ita ſit latus E F, ad latus E B, & ſic procedatur deinceps aſſumptis in A B, alijs punctis, & excitatis rectis perpendicularibus ad illam; per quarum extrema intelligatur ducta linea quædam, & ex B, excitetur B G, cuius cubus æqualis ſit comparationis homogeneo; agatur G H, parallela ipſi A B; & ex H, cadat H I. Dico I B, eſſe radicem æquationis propoſitæ. Eſt enim ſolidum ſub plano A M, minus quadrato I B, & altitudine I B, æquale cubo ex I H. At ſolidum prædictum idem eſt, quod ſolidum ſub plano L B, & altitudine I B, minus cubo ex I B, ergo ſolidum ſub plano L B, & altitudine I B, minus cubo ipſius I B, æquabitur cubo ex I H, ſeu ex B G; hoc eſt dato ſolido comparationis homogeneo.

SCHOLION.

Suſpicabitur quiſpiam, neceſſe eſſe, vt A L, æqualis ſit I B. Sed immeritò, cum enim fieri debeat applicatio ſolidi ad planum, id non requiritur, niſi cum eſt inueniendum maximum ſolidorum applicabilium; tunc enim, punctum C eſt inter A B, itaut C B, debeat eſſe æqualis A L, ſeu B M; ſi nimirum ſolidum applicari debeat plano, itaut ſit defficiens cubo; in reliquis punctis inter C B, id non requiritur. Quando igitur C B, tertia pars totius A B, non eſt æqualis B M, fieri debet æqualis, vt ſolidi altitudo nempè C B, cum fuerit æqualis B M, latitudini baſeos, fiat cubus einſdem altitudinis cum ſolido. At cum deinde nos deſcribendo lineam ſumimus puncta in linea A B, vt puta E, atque facimus vt exceſſus plani A M, ſupra quadratum E B, ad quadratum cuiuſdam lineæ, nempe E F, ita hæc ipſa linea ad ſegmentum E B, & ſic in alijs acceptis punctis deinceps in eadem linea C B, Manifeſtum eſt factum eſſe quod oportet; Quandoquidem ſupponamus factum eſſe exceſſum, quo A M, planum ſuperat quadratum E B, ad quadratum alicuius lineæ, vt E F, ita hæc ipſa linea ad ſegmentum E B; atque erecta perpendiculari E F, & ſic de alijs erectis à punctis in C B, per earum linearum extrema intelligatur ducta linea D F H B, ad extremum B, erecta ſit perpendicularis B G, quæ ſit latus cubi æqualis dato ſolido, ducta autem G H, parallela ipſi A B, vt occurrat mixtæ lineæ in H; ex H, cadat perpendicularis H I; Dico ſolidum ſupra planum A M, & ſub altitudine I B, minus cubo eiuſdem I B, æquale eſſe ſolido, cui eſt æqualis cubus ex B G. Quandoquidem factus eſt exceſſus plani A M, ſupra quadratum E B, ad quadratum lineæ E F, vt eadem linea, ad ſegmentum E B, & ſic de omnibus alijs lineis, ductis perpendiculariter ab omnibus punctis in C B, erit vt exceſſus plani A M, ſupra quadratum I B, ad quadratum lineæ I H, ità I H, ad I B, quare ex Elementis, ſolidum cuius altitudo eſt I B, baſis autem eſt exceſſus plani A M, ſupra quadratum I B, æquale erit cubo ex I H, ſeu B G, hoc eſt ſolido dato. Sed ſolidum cuius altitudo eſt I B, baſis verò eſt exceſſus plani A M, ſupra quadratum I B, eſt æquale ſolido, cuius baſis eſt planum A M, altitudo I B, minus cubo ex I B, ergo ſolidum cuius baſis eſt planum A M, altitudo autem I B, minus cubo eiuſdem I B, æquale eſt ſolido dato; Quod erat operæ pretium &c.

Illuſtriſs. Signor mio Padron Colendiſs.

Finalmente auendo fatto refleſſione à quel tanto, che V. S. mi ſignificò con la ſua corteſiſſima del dì 15. Nouembre del 1664. in propoſito di quella mia Dimoſtrazione Geometrica, & il tutto conferito con qualche Profeſſore, ſi è concluſo, che la dimoſtrazione non à difetto alcuno; e perche V. S. ne rimanga accertato, è neceſſario, ch'ella aſcolti queſte poche coſe.



Sia dato il piano A L M B, e sia rettangolo, del cui vn lato sia A B, e l'altro B M. Segasi A B, in C; si che C B, sia terza parte di tutto l' A B.

Hor dunque ò il C B, e vguale al B M, ò e disuguale; se gli è disuguale il segmento C M, è la terza parte di tutto l' A M, si ritroui vna retta, che possi esso piano C M, & à questa si applichi il piano tutto A M, e ne verrà vn lato, che sarà triplo della retta potente C M, terza parte di tutto l'A M. Dal punto C, s'eccitì la retta C D; di modo che sia come L C, due terze parti di tutto l' A M, al quadrato C D, così il C D, al C B. E manifesto, che il solido contenuto dalla base L C, e dall'altezza C B, e il massimo, percioche: Omnium solidorum applicabilium dato plano deficientium cubo, maximum est illud, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani. *E questo è certissimo per esser da altri già dimostrato, e lo potrei dimostrare ancor io. Hor qui V. S. auuerta, che noi non habbiamo fatto altro, solo che fare, come l'eccesso del piano A M, sopra il quadrato C B; già che L C; e il suddetto eccesso, e C B, e vguale al B M; si che C M, e quadrato, come dico il suddetto eccesso al quadrato C D, così il C D, al C B. E nel segmento C B, pigliando qualunque punto E, eccitiamo la retta E F, si che sia come l'eccesso del piano A M, sopra il quadrato E B, ad E, al quadrato E F, ad F B. In oltre come l'eccesso del piano A M, sopra il quadrato I B, al quadrato I H, così I H, ad I B, & in tal maniera operando con gl'altri punti della C B, sia descritta la linea mista B H F D, per i punti continuati abbiamo fatto quel, che bisognaua fare per trouar la radice della vguagliazione* $b\ pl.\ a - a^3 = z\ sol.$

E per dimostrar ciò supponga V. S. che B G, perpendicolare all' A B, sia lato di quel cubo, che è vguale à z. sol. & in oltre supponga, che A M, sia b pl. e condotta la linea G H, parallela all' A B; e dal punto H, cuschi la perpendicolare H I. Dico che I B, è il valore della radice è non deue I B, esser vguale al B M, ma si deue esser vguale al B M.

Già che si è fatto come l'eccesso dell' A M, sopra il quadrato I B, al quadrato I H, così I H, ad I B, ne segue, che quel solido, la cui base è il sopradetto eccesso del piano A M, sopra il quadrato I B, è l'altezza I B, sia vguale al cubo I H, cioè B G, cubo, ò pure z sol. ma il solido, la cui base A M, e l'altezza I B, meno il cubo dell' I B è vguale al solido la cui base è l'eccesso del piano A M, sopra il quadrato I B, e l'altezza è l'istessa I B, dunque il solido, la cui base A M, & l'altezza I B, meno il cubo dell' I B, sarà vguale al cubo del B G, ò vero z sol. V. S. dunque vede, che se A M, e b planum coefficiens sublaterale, & il cubo del B G, sit comparationis homogeneum, ò vero z sol. V. S. vede dico, che I B, e la radice, la quale non potrà mai esse vguale alla B M, alla quale deue esser vguale la C B, terza parte di tutta l' A B, per auere il massimo solido delli applicabili. Circa poi gl'essempij ch'ella me ne apporta per numeri &c. L'equiuoco stà che ella non fa il solido deficiente, si che il difetto sia cubo, il che facendo tornerà come dico io, e per meglio lasciarmi intendere io dissi che quando C B, non sia vguale alla B M; cioè che B M, non sia la terza parte dell A B, bisogna farla per potere applicare il massimo solido &c.

Supponghiamo A B, esser 48, e B M, esser 4; si che la terza parte dell' A B, cioè C B, sarà 16, che è inuguale al 4. Perche dunque 4 in 16 fà 64, il cui lato è 8, la linea potente C M sarà 8. si facci per tanto 8 lato da chiamarsi B M, hora per 8 si diuida A M, che è 192, tanto facendo B M 4 in A B 48, e ne verrà quoziente 24, per lato da chiamarsi A B. Hora il massimo solido do potersi applicare al piano A M 192 deficiente con vn difetto, che sia cubo; dico che sarà quello, che è constituito sopra 128, cioè L C, supponendo B M 8, & A B 24; si che A C sia 16, il quale solido è 1024, e questo sarà il massimo solido da potersi applicare al piano 192, che sia deficiente &c. Il che potrò dimostrargielo Geometricamente, ogni volta che ella voglia. Di modo che se noi supponessimo A M, pur 192, & A B 32; si che B M, fosse 6; il solido applicato al 192, ma deficiente con vn difetto cubo sarebbe minore del 1024. Sottraggasi 6 dal 32, resterà 26, il quale si multiplichi per 6 fà 156, quale multiplicato per 6 fà 9656, ò vero si moltiplichi 192 per 6, e fà 1152, dal quale sottrattone 216, cubo del 6 riman pure 936, il che è meno del 1024, perche V. S. dice. e soggiunse per la commun altezza B M, &c. ma questi solidi che ella fa, non sono quelli, de quali noi parliamo, cioè che siano deficienti con vn difetto,

che sia

che sia cubo; di modo che non fanno al proposito.

V. S. soggiunge. Ciò posto io dico che il solido L C, in C B, non è il massimo, &c. Confesso, ch'io non intendo questo discorso V. S. ne apporta l'esempio de i numeri supponendo A B, esser 12, A C 8, C B 4, A I 10, I B 2, & L C 32; &c. dice poi, che il solido non fà il solido deficiente: Si che il difetto sia cubo. Soggiunge appresso il solido L I, in I B, sarà 80. Tutto bene, ma non sono i solidi de quali noi parliamo deficienti con vn difetto cubo.

V. S. soggiunge dicendomi.

Passo ad vn altro punto V. S. dice che L B, sia B pl. e che I B, e la radice A, che era ignota, e per conseguenza B pl. in A -- a³ sia eguale al cubo I H, e sia l'istesso che L B, in I B -- I B, cubo. Hora facciamo i conti L B è 48, B I 2, B I, cubo 8; adunque L B, in I B -- I B cubo è 88; perche L B è 96, dal quale si leua 8 cubo di B I, il solido L I, in I B, eguale al cubo I H, dicemmo esser 80 solamente; adunque il cubo I H, che si figura z sol. e minore che L B in I B -- I B cubo; e conseguentemente minore di B pl. in A -- a³.

V. S. mi scusi, perche sta ella sempre su gl'esempj, che non conducono al caso nostro. V. S. dice che L I in I B sarà 80, perche suppone A I 10, & I B 2. Hora si deuon fare 80 L I in I B, che L I sia 40; di modo che sendo A I 10, e necessario, che A L, sia 4, e così parimente B M, dourà esser 4, & eccoci fuor del caso nostro, cioè che il solido del quale V. S. parla non è applicato all'A B, ò pure ad vn piano eguale ad esso, sì che sia deficiente in modo, che il difetto sia cubo, ma il difetto sarebbe vn solido sotto il piano I M, che è 8, sendo I B 2 e B M 4, e l'altezza sarebbe I B 2, che fan 16 multiplicato l'8 per 2 il qual 16, sottratto dal 96, solido sotto il piano L B, & l'altezza I B ne rimane 80, per il solido L I, in I B. Vegga dunque V. S. doue sta l'equiuoco, hor facciamo i conti à mio modo. Mentre che L B, e 48, I B 2, & B M 4, deue farsi che B M, sia pur 2; onde A B non sarà più 12 ma 24, & il piano L B, sarà pur 48, al quale applicato vn solido, che sia deficiente di vn cubo, il cui lato sia I B 2, trouerrà ella tal solido esser 88, perche sendo L B 48, mentre A B è 24, B M è 2, l'altezza I B 2, multiplicata per L B piano 48, fà 96, dal quale sottratto 8 cubo del I B resta 88, per il solido L I in I B, che è molto minore del solido L C in C B, ch'era 128 &c. Questo è quanto m'occorre, mentre per fine la riuerisco.

Pisa li 20. Aprile 1665.

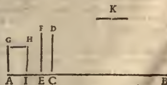
Di V. S. Illustriss.

Obligatiss. Seruitore
Carlo Renaldini.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVARTA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit
$ba^3 - a^4 = b^3 d$.



Data sit coefficiens A B, & K, sit recta cuius Quadrato-quadratum æquale sit comparationis homogeneo. Secetur A B, in C, ita vt A C, sit quarta pars totius A B. Deinde ex C, excitetur C D, itaut sit quemadmodum A C, ad C D, ita cubus C D, ad cubum C B; Manifestum est autem maximum plano-planum quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-quadrato esse id, quod applicatur quartæ parti datæ lineæ, & quadrato-quadratum, quod deficit occupare tres quartas partes datæ lineæ. Quare maximum plano-planum erit contentum sub A C, & sub cubo C B; Itemque constat plano-planum prædictum, æquale esse quadrato-quadrato ipsius C D. Sumantur deinceps alia puncta in A B, vt E, & ex E, excitetur E F, itaut quemadmodum A E, ad E F, ita cubus E F, ad cubum E B, atque adeò erectis perpendicularibus prædicta lege inuentis ad rectam A B, per earum extremitates ducta intelli-

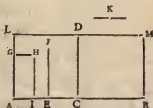
intelligatur linea. Mox verò ex A, excitetur A G, æqualis K, agatur autem G H, parallela ipsi A D, occurrens lineæ A D B, in H, ex H, verò cadat perpendicularis H I. Dico I B, esse propositæ æquationis radicem.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

QVINTA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$b^2 a^2 - a^4 = b i d.$$



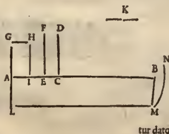
Data sit coefficiens magnitudo planum A M; at verò K, sit recta cuius plano-planum æquale sit comparationis homogeneo. Secetur A B, in C, vt A C, sit dimidium ipsius A B; atque adeò tam A C, quam C B, contineat duas quartas partes ipsius A B. Eodem modo planum ipsum diuisum erit. Vel igitur B M, æqualis est C B, vel inæqualis. Hoc autem casu constituendum est planum æquale coefficienti plano, ea lege vt latus maius duplum sit minoris vnde latus A B, duplum sit lateris B M. Ex puncto autem C, excitetur C D, ea lege, vt sit quemadmodum A C, quadratum ad C D, quadratum ita C D, quadratum ad C B, quadratum. Manifestum est autem Maximum plano-planum omnium applicabilium dato plano deficientium quadrato-quadrato esse illud quod applicatur duabus partibus ex quatuor in quas diuiditur planum, hoc est dimidio ipsius plani. Et quadrato-quadratum, quod deficit occupare duas reliquas partes, seu reliquum dimidium; itemque constat plano-planum sub C M, & L C, æquale esse plano-plano C D. Assumpto quocunque puncto E, & erecta perpendiculari E F, ea lege, vt sit quemadmodum planũ LE, ad quad. EF, ita quad. EF, ad quadratum EB, & sic deinceps assumptis alijs punctis in A B, & per extremitates erectarum intelligatur ducta linea, mox verò ad extremum A, excitata sit perpendicularis A G, æqualis K, cuius quadrato-quadratum æquale est comparationis homogeneo, agatur G H, parallela ipsi A B, ex H, cadat H I, perpendicularis. Dico A I, esse propositæ æquationis radicem.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

SEXTA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$b^3 a - a^4 = b^3 d.$$



Data sit coefficiens magnitudo solidũ AB M L N; at verò recta K, sit cuius quadrato-quadratum æquale sit comparationis homogeneo. Diuidatur A B, in C, vt A C, sit quarta pars totius A B, & hunc in modum etiam solidum diuisum erit; ex C, excitetur perpendicularis CD, ea lege, vt sit quemadmodum A C, ad C D, ità cubus ex C D, ad solidum sub C B, & M N. Manifestum est autem maximum plano-planum, quod applica-

tur dato

tur dato solido deficiens quadrato-quadrato esse id, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati solidi, & quadrato-quadratum, quod deficit occupare reliquam quartam partem. Quare maximum plano-planum erit contentum sub A C, & solido sub C B, & M N. Itemque constat plano-planum sub A C, & solido sub C B, & M N, æquale esse plano-plano C D. Deinde assumpto quocunque alio puncto E, & ex E, excitetur E F, eadem lege, vt sit quemadmodum A E, ad E F, ità cubus E F, ad solidum sub E B, & M N, & ita deinceps procedatur assumptis alijs, alijsque punctis, & erectis perpendicularibus modo iam dicto, & per earum extremitates intelligatur ducta linea; ex A, excitetur perpendicularis A G, æqualis k, cuius plano-planum æquale est comparationis homogeneo ex G, agatur G H, parallela ipsi A B, & ex H, cadat perpendicularis H I. Dico A I, æquationis propositæ radicem esse.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

SEPTIMA

Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$b a^4 - a^5 = b^1 d^4.$$

DAta sit coefficiens magnitudo recta A B, & K, sit cuius plano-solidum, nempè quadrato-cubus æqualis sit comparationis homogeneo. Diuidatur A B, in C, vt A C, sit quinta pars totius A B, ex C, excitetur C D, ea lege, vt sit quemadmodum A C, ad C D, ita quadrato-quadratum C D, ad quadrato-quadratum C B. Manifestum est maximum plano-solidum quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-cubo esse, id quod applicatur quintæ parti datæ lineæ, & quadrato-cubum, qui deficit occupare reliquas quatuor ex quinque partibus datæ lineæ. Itemque constat plano-solidum sub A C, altitudine & sub quadrato-quadrato C B, æquale esse quadrato cubo ex C D. Assumatur aliquod aliud punctum E, & ex E, excitetur E F, ea lege vt sit, quemadmodum A E, ad E F, ita quadrato-quadratum E F, ad quadrato-quadratum E B, & sic deinceps procedatur assumptis alijs, alijsque punctis & erectis lineis perpendicularibus per quarum extremitates intelligatur ducta linea. Mox autem ex B, excitetur perpendicularis B G, æqualis K, cuius quadrato-cubus æqualis sit comparationis homogeneo agaturque G H, parallela ipsi A B, ex H, cadat H I. Dico I B, esse æquationis propositæ radicem.

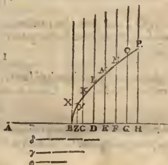
Est enim plano-solidum sub A I, & sub quadrato-quadrato I B, æquale quadrato-cubo ex I H, at verò prædictum plano-solidum æquale est plano-solido sub A B, altitudine, & sub quadrato-quadrato I B, minus quadrato-cubo ipsius I B. Quare plano-solidum sub A B, & quadrato-quadrato I B, minus quadrato-cubo eiusdem I B, æquale erit quadrato-cubo ipsius I H, seu B G, hoc est datæ rectæ K.



ALIVD QVODDAM GENVS MEDICEARVM LINEARVM Pro effectionibus Geometricis, cùm Æquatio fuerit multiplicis affectionis.

AD hoc Linearum genus pertinent Lineæ inseruientes effectionibus Geometricis pro æquationibus, in quibus Potestas est multipliciter affecta, vt si fuerit $a^4 + 2 b a^3 + b^2 a^2 - d^2 a^2 - 2 d^2 g a = d^2 g^2 + d^2 f^2$

Si igitur fuerit æquatio huiusmodi, ad quam Analysis conduxit, vt eo explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fiet vt $a^3 + 2 b a^2 + b^2 a - d^2 a - 2 d^2 g$, *ad* $d g^2 + d f^2$, *ità d, ad a.*



Exposita sit recta AB, quæ sit coefficiens longitudo subcubica, eiusque quadratum, minus quadrato δ, sit coefficiens planum subquadraticũ, & aliæ etiam magnitudines γ, & φ expositæ sint; deinde ipsa AB, protrahatur ad partes B, in infinitum, & in ipsa quidem protracta sumantur qualescumque partes BC, BD, BE, BF, BG, BH, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; mox verò fiat vt solidum ex δ, in quadratum γ vna cum solido ex eadem δ, in quadratum φ, ad cubum BC, vnà cum duplo solido ex quadrato BC, in AB, plus solido ex BC, in quadratum AB, minus solido ex BC, in quadratum δ, minus duplo solido ex γ, in quadratum δ, ità BC, ad CK, & eodem modo comparentur rectæ DL, EM, FN, GO, HP, &c. Iisdem adhibitis magnitudinibus datis, vnà cum BC, BD, BE, BF, BG, BH, & ita deinceps; Per puncta verò B, K, L, M, N, O, P, &c. intelligatur ducta quædam linea, nam hæc ipsa erit, quæ ad effectionem prædictam cõducit; Cùm enim factũ sit vt diximus erit etiam conuertendo vt cubus BC, vna cum duplo solido ex quadrato BC, in AB, plus &c. ad solidum ex δ in quadratum γ, plus solido ex eadem δ in quadratum φ, ita CK, ad BC. Huiusmodi igitur indolis est linea transiens per puncta B, K, L, M, N, O, P, vt si ex quocumque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis ZY, eadem sit ratio iam dicta solidi ad solidum, quæ est ZY, ad BZ; Quamobrem si coefficiens magnitudo subcubica fuerit AB, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur BX, æqualis rectæ, cuius quadratum ductum in γ^2 plus φ^2, faciat comparationis homogeneum; & ex puncto verò X, ducatur XY, parallela ipsi AH, ex puncto autem Y, cadat perpendicularis YZ, cubus BZ, vnà cum duplo solido ex quadrato BZ, in AB, plus &c. ad solidum ex δ in γ^2, vna cum solido ex δ in φ^2, ita ZY, ad BZ, ac propterea consurget æquatio, in qua BZ, quadrato-quadratum, plus duplo plano-plano ex cubo BZ, in AB, vna cum plano-plano ex BZ, quadrato in AB, quadratum, minus plano-plano ex BZ, quadrato in δ, quadratum, minus duplo plano-plano ex δ, quadrato in rectangulum sub BZ, & γ, æquabitur plano-plano ex quadrato δ in γ, quadratum, vnà cum plano-plano ex δ, quadrato in φ quadratum. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè BZ, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum vna cum duplo plano-plano &c. æquatur plano-plano ex δ quadrato in γ quadratum, plus plano-plano ex eadem δ quadrato in φ, quadratum. Propositæ igitur æquationis radix erit BZ, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Sic & aliæ plurimæ lineæ inueniri excogitarique possunt, quæ dificilimis Effectionibus inseruient. Sed prædictarum Linearum naturam diligentiùs persequi huius loci non est, alibi tamen de ipsis fortassis verba redibunt.

F DE-

DEFINITIONES.

I.

Posita *Quantitas, vt initio quoque definita fuit, est illa, quæ ad libitum sumitur ad communem mensuram eiusdem generis, & quæ ab vnitate denominatur.*

II.

Si fiat, vt Posita ad quadrati latus, ità hoc ad aliud, quæ prouenit longitudo, Resolutum Quadratum, *dicatur.*

III.

Si fiat, vt Posita ad latus rectanguli, ità latus alterum ad aliud, quæ prouenit longitudo, Resolutum Rectangulum *appelletur.*

IV.

Si fiat, vt Posita ad quadrati latus, ita quadratum resolutum ad aliud, quæ prouenit longitudo Resolutus Cubus *nuncupetur.*

V.

Si fiat, vt Posita ad vnius rectanguli latus, ità resolutum rectangulum ad aliud, quæ prouenit longitudo Resolutum Solidum, *vocetur.*

VI.

Si fiat, vt Posita ad quadratum resolutum, ità hoc ad aliud, quæ prouenit longitudo Quadrato-quadratum Resolutum, *dicatur.*

VII.

Si fiat, vt Posita ad rectangulum resolutum, ità hoc ad aliud, quæ prouenit longitudo Plano-planum Resolutum, *appelletur.*

VIII.

Resolutio Planorum in longitudines, Prima Resolutio, *dicitur.*

IX.

Solidorum autem, Secunda.

X.

Plano-planorum, Tertia; *& sic deinceps.*

XI.

Longitudines, in quas factæ sunt commemoratæ resolutiones, Æquipollentes Magnitudines, *dicantur.*

XII.

Quæ inter Plana, vel inter solida, vel inter Plano-plana &c. Fit comparatio Originaria dicatur Ratio,

Quæ

XIII.

Quæ inter Plana, vel inter solida, vel inter Plano-plana &c. modo iam dicto resoluta, fit comparatio, Æquipollens Ratio, *vocetur.*

XIV.

Cùm per Analyseòs vestigia regredimur, solidis, si quæ in ea extiterunt, ad synthesin, non nisi resolutis adscitis, est Regresus per Æquipollentia.

XV.

Analogismus omnis, quo in resoluendo vtimur, Analyticus, *dicatur.*

XVI.

In omni quidem Analytico Analogismo ad æqualitatem reuocato facto Parabolismo, cum opus fuerit, in explicanda æquatione quantitas, ad quam facta est omnium applicatio, non amplius adhibetur; hæc proindè, quæ alioquin Metiens dicebatur, quæque ad sinthesin adsciscitur, Reassumpta, *vocetur.*

XVII.

Transitus, quem facit Analysta, a resolutis Planis ad resoluta solida, Plano-plana &c. longitudinibus constanter inhærescens, Transistentia, *nuncupetur.*

XVIII.

Cùm verò ex æqualitate longitudinum inquiritur in ijsdem longitudinibus æquipollens proportio ei, quæ initio inquirenda aßumebatur, hæc Ratio symbolica, *vocetur, sic de æqualitate &c.*

XIX.

Cum autem ex proportione longitudinum per Reassumptam, fit gradatio ad eam, de qua quæritur, proportio, huiusmodi gradatio, Redintegratio, *nuncupetur. Sic de æqualitate.*

XX.

Et Proportio illa de qua quærebatur, quæque tandem adinuenta est, Redintegrata *appelletur.*

DE VNITATIS VSV IN GEOMETRIA

QVanti referat vnitatem in Geometriam inuexisse, facilè cuilibet erit depræhendere, si non nihil aduerterit difficultatem infinitorum propemodum in hac Arte Problematum, vnitatis vsu nullam reddi posse; Cùm enim quispiam instituta Analysi, synthesin aggreditur, si illa ad solida, vel plano-plana, &c. ascenderit, haud exiguis difficultatibus laborabit, quod etiam superiùs innuimus. Sibi tamen stratam reddi viam ad componendum per regressum Analyseos conspiciet, dum vnitatis beneficio, plana, solida, plano-plana, &c. in simplices longitudines transmutauerit; sic enim sibi licebit Analyseos vestigia repetere, ac propterea demonstrationem contexere; adeò vt non minus ei, quidem futura sit obuia Synthesis, quàm Analysis. Qua verò Arte hæc sit instituenda Resolutio, paucis explicabimus.

Vnitatis vsus in Geometria magnifaciendus.

PROPOSITIO I.

Quo pacto planum vnitatis præsidio in simplicem longitudinem transmutetur.

Propositum sit rectangulum A B C D, nihil autem refert, quod oblatum rectangulum sit quadratum, vel altera parte longius, tum quia solùm id discriminis est, quod in analogismo, cùm fuerit altera parte longius, non fit eiusdem lateris repetitio; vnde ille contingit in quatuor terminis non sic cùm fuerit quadratum; tunc enim in tribus terminis accidit analogismus, tùm quia rectangulum ad quadratum facilè reuocari potest facta igitur sit hypothesis de rectangulo A B C D; vnitas autem sit V, recta quædam linea ad libitum, quæ Posita dicitur. Fiat igitur vt V, ad A B, ita A D; (& si fuerit quadratum, ita eadem A B) ad aliam; hæc enim proposito satisfaciet; nam in illam propositum rectangulum resolutum dicetur, & quidem si rectangulum A B C D, fuerit quadratum, ea resolutum quadratum appellabitur, quòd si fuerit altera parte longius, resolutum rectangulum dicetur.

Sit autem quadratum, & disponatur recta quædam E I, longitudinis quantum sufficit ex qua abscindatur E F; æqualis ipsi V; ex puncto verò F, excitetur perpendicularis F G, æqualis A B, lateri prædicti quadrati; ducatur E G, quæ bifariam secetur in L, ex L, ducatur recta faciens cum E G, rectos angulos, eaque necessariò occurret ipsi E I; sitque L K, occurrens in K. Centro K, interuallo K E, describatur semicirculus, qui necessariò transibit per G, secans E I, in H. Manifestum est F H, esse rectam quæsitam; hæc enim ducta in E F, seu V, faciet rectangulum æquale quadrato G F, atque adeò proposito quadrato A B C D; cùmque E F, rationem habeat vnitatis, propterea F H, vt longitudo se habebit.

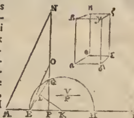
PROPOSITIO II.

Solidum, vnitatis præsidio, in simplicem longitudinem transmutare.

In solidis verò sic procedendum. Sit parallelepipedum (nihil autem refert, vtrum sit cubus, an non) si enim cubus non fuerit, longior est operatio; præstat ob id illud ad cubum reuocare. Esto igitur cubus, cuius latus A; sit autem vnitas V, quæ posita dicitur, & fiat, vt hæc ad latus A, ità latus A, ad aliud; proinde disponatur recta quædam E I, ex qua subtrahatur E F, æqualis positæ V; deinde ex F, erigatur perpendicularis F G, ipsi E I, æqualis tamen lateri dati cubi, nempe A; mox verò ducatur E G, quæ bifariam secetur in L, & ex L, agatur ipsi E G, perpendicularis L K, quæ ipsi E I, necessariò occurret, vt constat ex Elementis: occurrat autem in K; centro K, interuallo K E, describatur semicirculus, qui necessariò transibit per G; & secet E I, in H. Deinde protrahatur F E, ad partes E in M, vt M F, sit æqualis F H; ex M, agatur M N, parallela ipsi E G, occurrens F G, protractæ in N; erit F N, longitudo proposito satisfaciens. Quia semper tamen ferè contingit, vt in resolutionibus solida sint parallepipeda, vel sola, vel cubis admixta; illa autem ad cubos reuocare non exigui laboris sit, cùm inter duas rectas oporteat duas medias in continua ratione adinuenire; iuuat propterea statim ipsa parallelepipeda in longitudines resoluere, vel quod idem est, præcauere, ne in illa incidatur; quoniam verò parallelepipedum potest in duplici esse discrimine, vel ita, vt basis ipsius quadratum sit, vel sit rectangulum, sed non quadratum. Sit igitur parallelepipedum α β γ δ ε ζ η θ. cuius basis α β ε δ. si hæc fuerit rectangulum, sed non quadratum, ad quadratum redigatur.

Exponatur

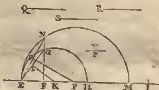
Exponatur igitur recta quædam E I, in qua secetur E F, æqualis V, positæ quantitati, quæ vnitas dicitur; ex F, erigatur perpendicularis F G, æqualis rectæ, quæ est latus baseos ipsius parallelepipedi vt $\alpha\,\delta$; agatur E G, quæ secetur bifariam in L; & ex L, ad rectos angulos ducatur L K; mox verò centro K, interuallo K E, describatur semicirculus, cuius peripheria secet E I, in H; mox verò fiat F O, æqualis altitudini ipsius parallelepipedi, vt $\alpha\,\beta$; deinde ducatur E O; Modo protrahatur H E, ad partes E, in M, ita vt M F, sit æqualis F H, agatur autem M N parallela ipsi E O, donec occurrat F O, protractæ in N, erit F N, recta proposito satisfaciens.



PROPOSITIO III.

Plano-planum in simplicem longitudinem transmutare.

In plano-planis ita procedendum; & primo quidem plano-planum, de quo loquimur sit quadrato-quadratum, vt $s^2 s^2$. Fiat igitur vt posita ad s, ita s, ad r, & vt posita ad r, ita r, ad q.



Disponatur itaque quædam recta E I, ex qua auferatur E F, æqualis positæ V; deinde ex puncto F, excitetur perpendicularis F G, æqualis S: mox verò ducatur E G, eaq; bissecetur in L; ex L, ei fiat perpendicularis L K, quæ necessariò occurret ipsi E I: occurrat autem in K; & centro K, interuallo k E, describatut semicirculus, qui necessariò per G, transibit; hic verò secet rectam E I, in H; mox protrahatur F G, ad partes G, & fiat F N, æqualis F H; ducatur E N, quæ bissecetur in O: ex O, eidem E N, constituatur perpendicularis O P; centro autem P, interuallo P E, describatur semicirculus, qui necessariò transibit per N, & secet E I, in M, erit F M, recta proposito satisfaciens.

Quia tamen in resolutionibus semper ferè contingit, vt plano-plana sint, vel sola, vel quadrato-quadratis admixta; propterea iuuabit statim ipsa plano-plana in longitudines resoluere, vel quod idem est præcauere, nè in illa incidatur.

Aut igitur plano-planum fit ex ductu duorum quadratorum æqualium, atque tunc est quadrato-quadratum, de quo hactenus disseruimus; vel fit ex ductu duorum quadratorum inæqualium, vel duorum rectangulorum, siue æqualium, siue inæqnalium, vel rectanguli, & quadrati.

Si constat duobus quadratis inæqualibus vt $b^2 c^2$, & instituenda sit resolutio, fiat vt vnitas, siue posita ad b, ita b, ad aliam d, deinde vt vnitas ad c, ita c, ad aliam f; mox vt vnitas ad d, ita f, ad g; atque hunc in modum longitudo g, proposito satisfacit; est enim illa, in quam plano-planum prædictum intelligitur resolutum.

Si verò constet duobus rectangulis, siue æqualibus, siue inæqualibus suo modo procedendum.

Et ex hactenus dictis liquidò constat quid agendum in Plano-solidis, Solido-solidis, &c.

Quæ hactenus tradita sunt exemplis illustrantur.

PROBLEMA.

Datum sit latus 12. diuidendum in duas partes, vt rectangulum sub partibus, æquale sit dato plano.

Datum sit latus 12. diuidendum in duas partes, vt factum sub ipsis æquale sit 32. Pars vna esto 1 R, alia erit 12 — 1 R productum sub his est 12 R — 1 Q, & hoc æquale

esse

esse debet 32. Dimidium longitudinis coefficientis sublateralis, seu numeri radicum est 6. cuius quadratum est 36; a quo si auferatur 32, remanebit 4; cuius latus quadratum est 2; quo dempto ex 6, dimidio iam dicto, fit residuum 4: pro parte minori, vnde maior non latebit, subtracta scilicet, minori ex toto latere diuideudo 12. Hinc,

PORISMA.

Sume dimidium numeri radicum, & ab eius quadrato aufer comparationis homogeneum; siue numerum absolutum, residui latus quadratum subtrahe ex dimidio iam dicto; quod remanet erit pars minor.

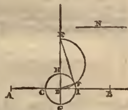
Speciebus autem sic.

Resolutio speciosa. Latus diuidendum esto b, homogeneum comparationis sit z planum, Pars vna esto a; alia erit b -- a; productum ex his est b a -- a^2 quod æquabitur z plano. Dimidium coefficientis longitudinis sublateralis est $\frac{1}{2}$ b; huius quadratum est $\frac{1}{4}$ b^2 à quo si auferatur z planum; fiet residuum $\frac{1}{4}$ b^2 -- z plano, cuius latus quadratum est ℞ ($\frac{1}{4}$ b^2 -- z plano) à quo si auferatur $\frac{1}{2}$ b; fiet residuum ℞ ($\frac{1}{4}$ b^2 -- z pl.) -- $\frac{1}{2}$ b. pro parte minori, Maior autem non latebit. Hinc,

PORISMA.

Sumatur dimidium coefficientis longitudinis sublateralis, & ab eius quadrato auferatur homogeneum comparationis, residui autem latus quadratum auferatur ex prædicto dimidio, quod enim superest erit pars minor quæsita.

Data sit recta A B, diuidenda in duas partes, ita vt rectangulum sub ipsis, æquale sit quadrato N.



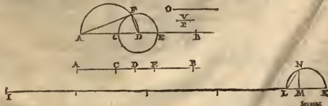
Diuidatur A B, bifariam in D, & ex D, excitetur perpendicularis D E, æqualis ipsi A D; at verò super D E, describatur semicirculus E F D, in quo aptetur E F æqualis N; ducaturque D F; centro autem D, interuallo D F, describatur circulus secans A B in C, & I.

Dico esse A C, partem minorem; itaut rectangulum A C B, æquale sit quadrato ex N. Protrahatur E D, vsque ad peripheriam in G.

Quoniam igitur D E, est æqualis A D. & G D, æqualis D I; erit A I, æqualis G E; & quia D H, est æqualis C D; æqualibus existentibus D E, A D; proinde residuum H E, æquabitur residuo A C; ergo rectangulum G E H; æquabitur rectangulo I A C; sed rectangulum G E H; æquale est quadrato E F; ergo rectangulum I A C; æquabitur quadrato E F; sed rectangulum I A C; est æquale rectangulo A C B; cum eadem sit A C, in vtraque & A I, sit æqualis C B; est enim A D, æqualis D B; atque C D, æqualis D I, propterea A I, erit æqualis C B; ergo rectangulum A C B; æquale erit quadrato E F, sed E F, facta est æqualis N; ergo rectangulum A C B, æquale erit quadrato N. Quod erat faciendum.

Data sit recta A B, ita diuidenda, vt rectangulum sub partibus æquale sit dato plano; nempe quadrato ex O.

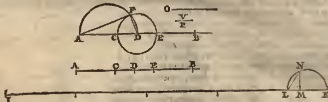
Ad vsum Vnitatis vti possemus superiori effectione, ac demostratione Geometrica, lubet tamen idem aliter absoluere.



Secetur A B, bifariam in D, & super alterutrum dimidium puta A D describatur semicirculus A F D, in quo aptetur recta A F, æqualis datæ rectæ O; mox autem agatur F D, & centro D, ad interuallum D F, describatur circulus C F E. Dico alterutrum punctorum C, E, puta C, satisfacere, ita vt rectangulum A C B, æquale sit quadrato datæ rectæ O.

Quoniam enim A D, æqualis est D B, ex constructione; & C D, æqualis est D E, erit A C, æqualis E B, addita communi C E, fiet A E, æqualis C B, quare rectangulum sub A C, & C B, æquabitur rectangulo sub A C, & A E, sed rectangulum sub A C, & A E, æquale est quadrato ipsius A F, ergo rectangulum sub A C, & C B, æquabitur quadrato eiusdem A F; sed quadratum rectæ A F, æquale est quadrato ipsius O; cum A F, facta sit æqualis ipsi O; propterea rectangulum sub A C, & C B, æquabitur quadrato datæ rectæ O.

Adscita autem vnitate in Geometria procedendum est hunc in modum. Sumatur recta quædam V, quæ posita dicetur, vnitatis munere fungens, in ordine autem ad hanc omnia tractentur conceptis magnitudinibus, seu quantitatibus cuiuslibet generis per modum longitudinum. Fiat igitur vt V, ad A D, ita A D, ad aliam quæ sit I K; Manifestum est rectangulum sub V, & I K, æquale esse quadrato ipsius A D. Deinde fiat vt V, ad O, ita O, ad aliam quæ sit I L; Manifestum est etiam rectangulum sub V, & I L, æquale esse quadrato ipsius O; ac proinde æquale esse quadrato rectæ A F. Secetur L M, æqualis V. Quoniam verò duo sunt rectangula, quorum vnum sub I K, & L M, aliud verò sub I L, & eadem L M, continetur ob communem autem eorum altitudinem L M, si minus de maiori subtrahatur, quod remanet erit rectangulum sub L K, & L M; super L K, describatur semicirculus LNK, & ex puncto M, excitetur perpendicularis M N, agaturque LN; hæc vtique poterit rectangulum K L M, residuum iam dictum; vt itaque rectangulum sub I K, & L M, æquale est quadrato A D, & rectangulum sub I L, & L M, æquale est quadrato rectæ O, seu A F, ita rectangulum K L M, seu quadratum L N, nempe excessus, quo rectangulum sub I K, & L M. superat rectangulum sub I L, & L M, æquabitur quadrato D F, quo quadratum A D, superat quadratum A F. Si igitur fiat C D, æqualis D F, circulo descripto C F E, erit C D, æqualis L N.



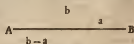
Intelligatur A B, bifariam diuisa in D, & facta sit C D, ipsi quidem L N, æqualis. Quoniam igitur rectangulum sub I K, & L M, æquale est quadrato A D, vt vidimus ergo rectangulum sub I K, & L M, minus rectangulo K L M, æquabitur quadrato A D, minus rectangulo K L M, sed rectangulum K L M, æquale est quadrato L N, ergo rectangulum sub I K, & L M, minus quadrato L N, æquabitur quadrato A D, minus quadrato L N, sed quadratum C D, est æquale quadrato L N, siquidem fecimus C D, æqualem L N, ergo rectangulum sub I K, & L M, minus quadrato L N, æquabitur quadrato A D, minus quadrato C D; sed rectangulum sub I K, & L M, minus quadrato L N; (hoc enim quadratum idem est quod rectangulum k L M), æquale est rectangulo sub I L, & L M, quadratum verò ex A D, minus quadrato C D, idem est quod rectangulum C A E, cum C E, sit in D, bifariam diuisa, & ei addita sit A C, ergo rectangulum sub I L, & L M, æquabitur rectangulo C A E, sed rectangulum C A E, est æquale rectangulo A C B, ergo rectangulum sub I L, & L M, æquabitur rectangulo A C B; sed rectangulum sub I L, & L M, æquale est quadrato ex O, quandoquidem fecimus, vt V, ad O, ita O, ad aliam puta I L, atque L M, fecimus æquale ipsi V, ergo rectangulum A C B, æquabitur quadrato ex O. Quod faciendum erat.

Vnitatis

Vnitatis vsum hucusque explicuimus, nunc tamen non est opus huiusmodi industria, siquidem in superiori Problematis analysi nullus est factus ascensus ad solida, modo resolutionem afferemus Problematis, in quo huiusmodi ascensus contingit; Propositum itaque sit.

PROBLEMA.

Datum latus ita diuidere, vt Quadratum vnius partis ad rectangulum sub toto, & altera parte datam habeat rationem.



Datum sit latus A B, sic in duas partes diuidendum, vt quadratum vnius partis ad rectangulum sub toto, & altera parte rationem habeat, vt R ad S.

Numeris hunc in modum Propositum sit latus diuidendum 12, ità vt quadratum vnius partis, ad rectangulum sub toto altera parte rationem habeat, vt 4 ad 3, pars vna esto 1 R, alia erit 12 -- 1 R, quadratum ipsius 1 R est 1 Q, rectangulum sub toto, & altera parte est 144 R -- 12 R, est vt 4 ad 3, ita 1 Q, ad 144 -- 12 R, ergo fiet æquatio 3 Q = 576 -- 48 R, & per antithesin 3 Q + 48 R = 576 fiet facto parabolismo 1 Q + 16 R = 192, cuius æquationis radix est 8 hinc Canon &c.

Resolutio numerosa.

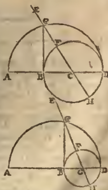
Latus ipsum esto b, & pars vna sit a, altera igitur erit b -- a, quadratum partis, quæ ponitur a est a^2, rectangulum autem sub toto, & altera parte, quæ erat b -- a, est $b^2 - b a$, vt autem est r ad s, ità debet esse a^2 ad $b^2 - b a$, facilioris verò resolutionis gratia fiat vt s ad r, ità b ad aliam putà d, propterea erit analogismus, vt d ad b, ità a^2 ad $b^2 - b a$, vndè fiet æquatio multiplicatis extremis, & medijs, eaque erit $d b^2 - d b a = b a^2$, & per antithesin fiet $b a^2 + d b a = d b^2$, omnibus autē applicatis ad b & $a^2 + d a = d b$. Dimidium coefficientis sublateralis d, est $\frac{1}{2}$ d cuius quadratum est $\frac{1}{4} d^2$, cui addito d b fit $\frac{1}{4} d^2 + d b$, cuius latus quadratum est $R(\frac{1}{4} d^2 + d b) - \frac{1}{2} d$; Hinc.

Resolutio speciosa.

PORISMA.

Quadrato dimidia coefficientis sublateralis addatur rectangulum factum à latere diuidendo in illud, ad quod latus diuidendum in eadem est ratione, in qua est terminus consequens rationis data ad terminum antecedentem, aggregati verò sumatur latus, & ei subducatur coefficientis dimidium, residuum enim erit radicis pretium, & partem vnam quæsitam diuidendi lateris exhibebit, reliqua verò non latebit.

Duobus modis potest contingere resolutio, vel ità vt latus diuidendum sit minus eo, ad quod est, vt terminus consequens rationis datæ ad antecedentem, idque euenit, quando ratio data est maioris ad minus, vel contra, ideò etiam duobus modis continget effectio, eadem tamen omninò contingit demonstratio.



Datum sit latus A B, diuidendum ea lege, vt quadratum vnius partis ad rectangulum sub toto, & altera parte rationem habeat vt R, ad S. Fiat vt S ad R, ità A B, ad B D, deinde super A D, describatur semicirculus A G D, diuisa autem B D, bifariam in C, centro C, interuallo alterutro C B, C D, describatur circulus, mox verò ex B, excitetur perpendicularis B G, & per G, & C, ducatur G C H, quæ protrahatur ad partes G, ita vt F E, sit æqualis A B. Dico F E, sic esse diuisam in G, vt quadratum G F, ad rectangulum F E G, rationem habeat, vt B D, ad A B; seu vt R ad S.

Quoniam enim A B, B G, B D, sunt continuè proportionales, erit vt A B, ad B D, ità quadratum A B, ad quadratum B G; sed quadrato B G, est æquale rectangulum H G F; ergo quadratum A B, ad rectangulum H G F erit, vt A B, ad B D; & conuertendo vt B D, ad A B, ità rectangulum H G F, ad quadratum A B, hoc est ad

est ad quadratum F E; quare vt H F, ad F E; (ita enim est B D, ad A B,) ità erit rectangulum H G F, ad quadratum E F; sed vt H F, ad F E, ità rectangulum H F G, ad rectangulum E F G, ob communem altitudinem F G; quare vt rectangulum H F G, ad rectangulum E F G, ità rectangulum H G F, ad quadratum E F; quoniam autem est, vt totum rectangulum H G F, ad totum quadratum E F; ità ablatum rectangulum H F G, ad ablatum rectangulum E F G, erit reliquum, putà quadratum F G (hoc enim remanet, si ex rectangulo H G F, auferatur rectangulum H F G) ad reliquum rectangulum F E G (hoc enim remanet, si ex quadrato E F, auferatur rectangulum E F G,) vt totum rectangulum H G F, ad totum quadratum E F; hoc est vt rectangulum H F G, ad rectangulum EFG; seu vt H F, ad F E; hoc est vt B D, ad A B, seu vt R, ad S, &c.

Quoniam superior resolutio, etsi procedens ad solida ascendendo, Effectionem Geometricam dictauit, cuius demonstratio satis est obuia solidis neglectis, per quæ factus erat incessus in resoluendo; at verò synthesis, analyseos vestigijs repetitis, vtporè per solida procedens, parùm videtur ijs arridere, quibus candor Geometricus est in delitijs, quamuis habeat cum veritate commercium. Ea verò sic se habet, eadem Effectione supposita.

Quoniam B G, tangit circulum B F D, erit rectangulum H G F, æquale quadrato BG, hoc est rectangulo A B D, hoc est rectangulo E F H; sed rectangulum H G F, æquale est quadrato GF, plus rectangulo GFH; ergo quadratum G F, plus rectangulo G F H, æquabitur rectangulo EFH; omnibus ductis in AB, seu EF; ergo solidum ex AB, seu EF, in quad. G F, plus facto abs G F, in rectangulum E F H, æquabitur facto ab E F, in rectangulum E F H; hoc est abs F H, in quadratum E F; & per antithesin, quod fit ex F H, in quadratum E F, minus facto ab F H, in rectangulum E F G, æquabitur facto ex E F, in quadratum G F; reuocata æqualitate ad proportionem, fiet analogismus vt F H, ad E F, hoc est vt B D, ad A B, hoc est vt R ad S, ità quadratum G F, ad quadratum E F, minus rectangulo E F G, hoc est ad rectangulum F E G. Compositio per solida procedens.

Eò igitur omnis industria debet Artificis tendere, vt non casu comparanda sit demonstratio Geometricæ Effectionis habitæ, analyseos præsidio, & non contexatur per solidorum comparationem, propter eam, quam diximus, obscuritatem: In cuius gratiam multa nostris lucubrationibus adinuenimus, quibus opitulantibus assequi licebit intentum; vndè repetendo analyseos vestigia, quamuis in ea factus sit assensus ad solida, licebit veluti deducto filo, incedere, solidis ipsis neglectis, atque propositum demonstrare.

Præcauendum est igitur, nè habita radicis æstimatione, atque indè comperta æqualitate inter plana, nè deindè incidatur in solida ad concludendum propositum. Id vero fit beneficio positæ quantitatis ad eum, qui sequitur modum. Cum igitur adinuentum fuerit quadratum ex G F, vnà cum rectangulo GFH, æquale esse rectangulo E F H, operæ pretium est, quantitatem aliquam ad libitum ponere, quæ vnitatis munere fungatur, quæ dicatur V, penes quam plana tractanda sunt per analogismos, vt in longitudines resoluantur, mox verò eadem positâ quantitate adhibitâ, inuehenda est in medium quantitas E F, veluti secundus terminus analogiæ; hoc enim pacto inter longitudines æqualitas retinebitur, quæ per antithesin non euanescet, atque tandem hac trasmutata in analogismum, comperiemus esse, vt F H, ad E F, ijs adhibitis, quæ præmisimus, Lemmatibus, ità quadratum G F, ad quadratum E F, minus rectangulo E F G, hoc est ad rectangulum F E G.

Fiat igitur secundùm positam quantitatem V, resolutio quadrati G F, in longitudinem K, & rectanguli G F H, in longitudinem L, demum rectanguli E F H, in longitudinem M, & erit quidem K, vnà cum L, æqualis M. Mox fiat vt eadem posita ad E F, ità K, ad N, & vt eadem posita ad E F, ità L, ad O, denique vt eadem posita ad E F, ità M, ad P, & erit quidem N, vnà cum O, æqualis P, ergo P, minus O, æquabitur N.

Resoluatur quadratum E F, in longitudinem Q, & rectangulum E F G, in longitudinem R, vtrumque secundùm eandem positam; ergo rectangulum F E G, erit Q, minus R; resolutum autem erat quadratum G F, in longitudinem K; ex ijs igitur, quæ in suprà positis Lemmatibus ostensa sunt, erit vt H F, ad F E, ità K, ad Q, minus R; hoc est ità quadratum G F, ad rectangulum F E G; Quod erat intentum.

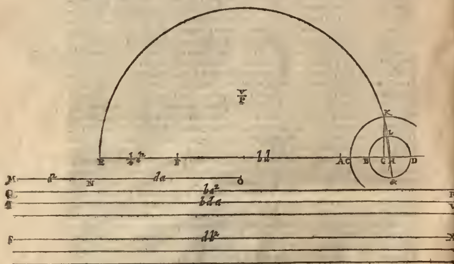
Sed vt hoc idem Problema iuxta generalem nostram componendi formam tractemus, repetitis omninò Resolutionis vestigijs, sistendo intra planorum comparationem, quamuis hæc per solida processerit, ita ratiocinandum. Et primo Effectio, quam Porisma dictat, Generalis ratio resoluendi, quam Auctor adinuenit.

G ad eum,

ad eum, qui ſequitur modum perficienda,

Recta A B, ſit quæ detur diuidenda in puncto C; vt quadratum C B; ad rectangulum B A C, datam habeat rationem, quæ B D, ad B A.

Diuidatur B D, bifariam in H, ſitque G H, quantitas poſita; deinde fiat vt G H, ad A B, ita B D, ad F H; mox, vt G H, ad B H, ita B H, ad E F; ſuper E H, deſcripto ſemicirculo, ex puncto G, erigatur perpendicularis G K, agaturque H K, & centro H, interuallo æquali ipſi B H, deſcribatur arcus ſecans H K, in L; deinde fiat C B, æqualis K L. Dico A B, ſic eſſe diuiſam in C, vt quadratum C B, ad rectangulum B A C, ſit in ratione B D, ad A B. Id porrò, vnitatis, ſiue poſitæ quantitatis beneficio, demoſtrabimus analyſeos repetitis veſtigijs, etſi analyſis ad ſolida aſcenderit; ſi tamen hæc præmittantur,



$AB = b = 6$	$MN = a^2 = 16$
$BD = d = 8$	$NO = da = 32$
$CB = a = 4$	$QR = ba^2 = 96$
$AC = b - a = 2$	$TV = bda = 192$
$EF = \frac{1}{4} d^2 = 16$	$SX = db^2 = 288$
$FH = bd = 48$	$PY = b^2 = 36$
$GH = o = 1$	$ZY = ba = 24$
$HL = \frac{1}{2} d = 4$	$PZ = b^2 - ba = 12$
$LK = a$	

Hoc eſt quadratum C B, ad rectangulum B A C, erit vt B D, ad A B. Quod oportebat efficere &c.

Quoniam rectangulum E H G, æquale eſt quadrato H K; ſed H K eſt æqualis C H; ergo rectangulum E H G, æquabitur quadrato C H; ſed quadrato C H, eſt æquale rectangulum D C B, plus quadrato B H; ergo rectangulum E H G, æquabitur rectangulo D C B, plus quadrato B H; ſed rectangulum E H G, eſt æquale rectangulo E F in G H, plus rectan-

rectangulo F H, in G H; ergo rectangulum E F, in G H, plus rectangulo F H G, æquabitur rectangulo D C B, plus quadrato B H; sed rectangulum E F, in G H, æquale est quadrato B H (factum est enim vt G H, ad B H, ità B H, ad E F;) æqualibus propterea hinc inde sublatis, rectangulum F H G, æquabitur rectangulo D C B; sed rectangulo D C B, est æquale quadratum C B, plus rectangulo C B D; ergo quadratum C B, plus rectangulo C B D, æquabitur rectangulo F H G.

Fiat vt G H, ad C B, ità C B, ad M N, & ità B D, ad N O; nam rectangulum M N, in G H, plus rectangulo N O, in G H, æquabitur rectangulo F H G; atque adeò M N, plus N O, æquabitur F H.

Fiat rursus vt G H, ad A B, ità M N, ad Q R; ità N O, ad T V, & ità F H, ad S X. Vel, cùm fuerit factum, vt G H, ad A B, ità A B, ad P Y, fiat vt G H, ad B D, ita P Y, ad aliam, quæ erit eadem S X. Cùm enim M N, plus N O, æquaretur F H, etiam Q R, plus T V, æquabitur S X; & per antithesin S X, minus T V, æquabitur Q R.

Fiat vt G H, ad A B, ità C B, ad Z Y; vt permutando fit G H, ad C B, quemadmodum A B, ad Z Y. Superest ostendendum æqualitatem hanc ad proportionem redigi, in qua vt B D, ad A B, ita fit N O, ad Z Y.

Quoniam igitur factum est vt G H, ad A B, ita F H, ad S X; & conuertendo vt A B, ad G H, ità S X, ad F H; factum autem erat vt G H, ad B D, ità P Y, ad S X; ergo ex æquali secundum rationem perturbatam erit vt A B, ad B D, ità P Y, ad F H; ergo conuertendo vt B D, ad A B, ità F H, ad P Y, sed F H, æquatur M N, plus N O; ergo vt B D, ad A B, ita M N, plus N O, ad P Y; sed fecimus vt G H, ad C B, ita B D, ad N O, & vt G H, ad C B, ita A B, ad Z Y; ergo vt B D, ad N O, ità A B, ad Z Y; ergo vt B D, ad A B, ita N O, ad Z Y; sed erat vt tota B D, ad totam A B, ità tota M N, plus N O, ad totam P Y; nunc verò est vt tota B D, ad totam A B, sic ablata N O, ad ablatam Z Y, ergo reliqua M N, ad reliquam P Z, erit vt tota B D, ad totam A B; hoc est quadratum C B, ad rectangulum B A C, erit vt B D, ad A B.

SCHOLION.

Ex suprapositò Exemplo definitiones iam suprà allatas facillimum erit explicare. Cùm supra diceremus; fiat vt G H, ad B H, ita B H, ad E F, ipsa E F, dicitur quadratum resolutum. Deinde cùm diceremus fieri vt G H, ad C B, ita C B, ad M N, ipsa M N, erit pariter quadratum resolutum. Cùm diceremus fieri vt G H, ad C B, ita B D, ad N O, erit ipsa N O, rectangulum resolutum. Cùm diceremus fieri vt G H, ad A B, ita M N, ad Q R, erit ipsa Q R, solidum resolutum, ita etiam T V, quemadmodum S X, erunt solida resoluta.

Definitiones explicantur.
Quadratum resolutum.
Rectangulum resolutum, &c.

Quando autem superiùs resoluimus quadratum B H, in E F longitudinem, vt quadratum C B, in longitudinem M N, & rectangulum C B D, in longitudinem N O, dicitur prior resolutio; sic quando solidum resoluimus in longitudines Q R, T V, S X, secunda dicitur resolutio.

Resolutio prior.
Resolutio posterior.

Resolutum est enim solidum sub altitudine A B, & quadrato C B, in longitudinem Q R, & solidum sub altitudine A B, & rectangulo C B D, in longitudinem T V, & solidum sub altitudine B D, & quadrato A B, vel sub altitudine A B, & rectangulo A B D, resolutum est in longitudinem S X.

Magnitudines æquipollentes.
Ratio originaria.

Supradictæ autem longitudines, in quas factæ sunt commemoratæ resolutiones, magnitudines æquipollentes dicuntur. Æqualitas autem, quæ est inter rectangulum E H G, & quadratum H K, & inter rectangulum F H G, & rectangulum D C B, originaria dicitur ratiò, estque ratio æqualitatis; at verò æqualitas inter longitudines M O, & F H, & inter Q R, plus T V, & S X, æquipollens ratio nuncupatur. Ille autem regressus, quem facimus ab æqualitate inter rectangulum F H G, & rectangulum D C B, ad æqualitatem inter M O, & F H, & inter Q R, plus T V, &c. dicitur regressus per æquipollentia. Quando autem fecimus vt G H, ad B H, ita B H, ad E F; & vt G H, ad A B, ita B D, ad F H; & vt G H, ad C B, ita C B, ad M N, &c. Hi sunt analogismi, quos Analyticos appello. Quando verò fecimus vt G H, ad A B, ita M N, ad Q R, &c. quantitas A B, est, quæ à nobis reassumpta dicitur; hæc enim est, ad quam omninm facta est applicatio in resolutione, in qua deinceps negligitur. Quando autem gradum fecimus à comparatione inter M O, & F H, ad comparationem inter Q R, plus T V, & S X, dicimur transistentiam fecisse. Cùm autem inferimus ex ratione, quam habet M N

Ratio æquipollens.
Regressus per æquipollentia.
Analogismi Analytici.
Quantitas reassumpta.
Transistentia.

ad P Z, quæ est B D, ad A B, inferimus inquam, rationem quadrati A C, ad rectangulum B A C, esse vt B D, ad A B, hæc ratio symbolica vocatur; & tunc dicimur Redintegrationem fecisse, & ratio illa, nimirùm quadrati C B, ad rectangulum B A C, vt B D, ad A B, ea est ratio, quam Redintegratam appello.

PROBLEMA.

Datis base, & perpendiculo, dataque ratione aggregati ex vno latere, & perpendiculo, ad aggregatum ex altero latere, & perpendiculo, reperire triangulum.

In triangulo A B C, data sit basis B C, 63, itidem data sit perpendicularis A D, 20, atque demum data sit ratio, quam habet aggregatum ex latere A B, & perpendiculari AD; ad aggregatum ex alio latere A C; & ex eadem perpendiculari A D, vt 5, ad 8, quæruntur latera.

Centro A, interuallo A D, describatur circulus; deinde eodem centro A, interuallo autem A B, alter circulus describatur, & quærantur latera A B, A C. Protrahatur C A, vsque ad K. Latus A B, esto 1 R; K N, erit 1 R + 20 vt igitur 5 ad 8, ita debet esse 1 R + 20, nempè K N, ad aggregatum ex A D, A C, puta H C; vt igitur 5, ad 8, ita 1 R + 20, ad [illegible]; singula autem assequemur; propterea quod, cùm (vt iam supra dictum fuit).

Datum sit triangulum A B C, cuius basis B C 63, sit data; sit itidem data perpendicularis A D 20; sit demum data proportio &c. Supposuimus autem A B, esse 1 R; fecimus verò vt 5 ad 8, secundum datam rationem ita K N 1 R + 20, ad [illegible] pro H C; proinde si ex H C, puta [illegible] auferamus H E, nimirum 1 R + 20, remanebit [illegible] — 1 R — 20, pro E C; Si vero ab A E, puta 1 R, auferamus A N, nempe 20, remanebit 1 R — 20, pro N E, atque adeo H K, erit 1 R — 20; quamobrem si ipsi H C, nempè [illegible] addamus 1 R — 20, fiet summa [illegible], pro KC. Vt igitur 63, ad [illegible] ità [illegible] — 1 R — 20, seu [illegible], ad [illegible].

Si igitur F C [illegible] subtrahatur ex 63, & remanebit pro B F [illegible], huius dimidium est [illegible], pro B D; huius autem quadratum est.
[illegible]. Huic addatur 400, quadratum scilicet perpendicularis A D, multiplicetur itaque 400, per 9922500, fiet productum 3969000000, addendum numero 9144140625, fiet igitur numerator fractionis
1521 QQ + 74880 C — 6537150 Q — 183600000 R + 13113140625; ac proinde erit fractio
[illegible] = 1 Q tollatur fractio per multiplicationem in crucem & fiet æquatio huiusmodi 1521 QQ + 74880 C — 6537150 Q — 183600000 R + 13113140625 = 9922500 Q; & per antithesin 1521 QQ + 74880 C — 183600000 R + 13113140625 = 16459650 Q. & rursus per antithesin 16459650 Q + 183600000 R — 74880 C — 521 QQ = 13113140625; Omnibus diuisis per 1521, fiet æquatio huiusmodi
[illegible] + [illegible] — [illegible] — 1 QQ = [illegible], quæ per Isomœriam reuocabitur ad hanc
25035127650 Q + 424747767600000 R — 74880 C — 1 QQ =
46141781761324390625. Huius æquationis radix est 38025, vt patebit, qua diuisa per 1521 prodibit 25, radix prioris illius æquationis. Æquationem illam per numeros fractos rectè se habere constat. Quandoquidem multiplicato numero quadratorum per 625, quadratum ex 25, producetur numerus 10287281250, quo diuiso per 1521, prosilit in quotiente 6763498 [illegible] deinde ducto 183600000 in 25, radicis pretium fit 4590000000, quo diuiso per 1521, fit quotiens 3017751 [illegible], & est radicum pretium, quo addito ad pretium quadratorum superiùs habitum 6763498 [illegible], fit summa 9781250; ab hac summa subducatur 390625, numerus quadrato-quadratorum, fiet residuum 9390625, ab hoc tandem residuo, subducatur pretium cuborum, quod quidem fit ex multi-

ex multiplicatione numeri 15625, cubi ex 25, In numerum cuborum 74880, & productum 1170000000, diuidatur per 1521, orietur pretium cuborum 769230 $\frac{1170}{1521}$, & remanebit 8621394 $\frac{351}{1521}$, quantum plane fit diuidendo numerum absolutum supradictum 13113140625 per 1521.

Æquationem hanc per Isomœriam reuocari ad illam, superiorem patet, siquidem pretium quadratorum est 361983067160897812 50, pretium autem radicum est, 16151033862990000000, horum summa est 52349340579079781250, à qua si subtrahatur quadrato-quadratum radicis (est enim radix huius æquationis 38025, numerus habitus per multiplicationem 25, in 1521) nempe 20906286173753900625, & remanebit 50258711961704390625, numerus absolutus totius æquationis, siue comparationis homogeneum. Radix autem hunc in modum extrahetur.

Proposita æquatio sit huiusmodi.

25035127650 Q + 424747757600000 R − 74880 C − 1 QQ = 46141781761334390625.

Cùm autem deprehensum fuerit radicem vniuersam pluribus singularibus lateribus, puta quinque constare, sitque eadem lex obseruanda, non secus ac si radix binomia foret; quandoquidem priora quotcunque singularia latera simul comparatione subsequentis vnius munere funguntur. Proinde fingendum est eam esse binomiam, nempè $a + e$; coefficiens autem sub quadrato sit b pl. coefficiens sub latere sit d sol. coefficiens sub cubo sit f. Comparationis homogeneum sit z pl. pl.

Quadratum ex $a + e$ est $a^2 + 2ae + e^2$, quo ducto in b pl. fit b pl. a^2 + 2 b pl. ae + b pl. e^2. Radix $a + e$ ducatur in d solidum, & fiet d solidum a + d solido e; horum aggregatum est b pl. a^2 + 2 b plano ae + b plano e^2 + d solido a + d sol. e; ex hoc subtrahatur productum, quod fit ex $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$; cubo nimirum ipsius $a + e$, in f, longitudinem. Illud autem est $fa^3 + 3fa^2e + 3fae^2 + fe^3$; factaque subtractione, remanebit b pl. a^2 + 2 b pl. ae + b pl. e^2 + d sol. a + d sol. $e - fa^3 - 3fa^2e - 3fae^2 - fe^3$, ex quo etiam subtrahere oportet quadrato-quadratum eiusdem radicis & remanebit.

b pl. a^2 + 2 b pl. ae + b pl. e^2 + d sol. a + d sol. $e - fa^3 - 3fa^2e - 3fae^2 - fe^3 - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$. Et hoc æquabitur z pl. pl. Comparationis homogeneo addatur a^4, & fa^3 ob notam defectus & prouenient b pl. a^2 + 2 b pl. ae + b pl. e^2 + d sol. a + d sol. $e - 3fa^2e - 3fae^2 - fe^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$ = z pl. pl. + a^4 + fa^3. Hinc autem subtrahantur b pl. a^2, & d sol. a, vt remaneat æquatio

2 b pl. ae + b pl. e^2 + d sol. $e - 3fa^2e - 3fae^2 - fe^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$ = z pl. pl. + $a^4 + fa^3$ − b pl. a^2 − d sol. a.

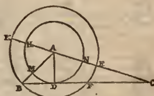
Hoc autem est illud residuum diuisisse per diuisores illos, &c. Diuisores autem sigillatim accepti sunt 2 b pl. a; b pl; d sol; $3fa^2$; $3fa$; f; $4a^3$; $6a^2$; & $4a$.

Quoniam verò quæsita radix pluribus quàm duobus singularibus lateribus constat; propterea in eligendis diuisoribus, ijsdemque proprijs sedibus collocandis, oportet cautum esse Analystam, qui in memoriam si reuocauerit, quæ iam suo loco explicuimus, nempe adhibendas esse cyphras, easque apponendas, vt ratio dictat, certe resolutionem sine errore perficeret.

Diuisione igitur instituta fiet quotiens pro secundo singulari latere.

At verò inuestigaturi tertium, vtemur duobus iam elicitis tanquam vno, & iuxta legem præscriptam operabimur. Iam enim omnis est operatio perficienda, ea ratione, vt duo priora singularia, quæ eliciuntur latera, vnius munere fungantur. Deinde procedendum omnino quemadmodum fit in singulari latere primo tractando; duo enim, vel tria, vel plura sint, nihil refert, eadem siquidem præcepta de ijs intelligenda sunt, non secus ac ynum singulare latus foret &c.

In trian-



In triangulo A B C, data sit basis B C, nempe b; itidem data sit perpendicularis A D, nimirum d; atque demum data sit proportio, quam habet aggregatum ex latere A B, & perpendiculari A D, ad aggregatum ex alio latere A C, & ex eadem perpendiculari A D, vt S, ad R, quæruntur latera. Centro A, interuallo A D, describatur circulus; deinde eodem centro A, interuallo autem A B, alter circulus describatur, & quærantur latera A B, A C. Protrahatur C A, vsque ad K. Latus A B esto a. K N, erit $a + d$; vt igitur s, ad r, ita debet esse $a + d$, nempè K N, ad aggregatum ex A D, A C, puta H C. Vt igitur s, ad r, ita $a + d$, ad $\frac{ra+rd}{s}$ singula assequemur; propterea quod cùm iam supra dictum fuerit,

Datum sit triangulum A B C, cuius basis B C. sit data b; sit itidem data perpendicularis A D, d; sit demum data proportio vt s, ad r. Supposuimus autem A B, esse a; fecimus verò vt s ad r, secundum datam rationem, ita K N, $a + d$, ad $\frac{ra+rd}{s}$ pro H C; Proinde si ex H C, puta $\frac{ra+rd}{s}$ auferamus H E, nimirum $a + d$, remanebit $\frac{ra+rd}{s} - a - d$, pro E C; Si verò ab A E, puta a, auferamus A H, nempè d, remanebit $a - d$ pro N E; atque adeo H K, erit $a - d$. Quamobrem si ipsi H C, nempe $\frac{ra+rd}{s}$ addamus $a - d$, fiet summa $\frac{ra+sa+rd-sd}{s}$ pro K C; vt igitur b, ad $\frac{ra+sa+rd-sd}{s}$ ita $\frac{ra+rd}{s} - a - d$, seu $\frac{ra-sa+rd-sd}{s}$, ad fractionem hanc nimirum.

$\frac{rraa-ssaa+2rrda-2srda+rrdd-2srdd+ssdd}{bss}$.

$$\begin{array}{r} ra + sa + rd - sd \\ ra - sa + rd - sd \\ \hline - srda - s^2da - srd^2 + s^2d^2 \\ + r^2da + srda + r^2d^2 - srd^2 \\ - sra^2 - s^2a^2 - srda + s^2da \\ r^2a^2 + sra^2 + r^2da - srda \\ \hline \end{array}$$

Hoc productum $\frac{rraa-ssaa+2rrda-2srda+rrdd-2srdd+ssdd}{ss}$

Diuidatur per b, fiet

Quotiens $\frac{r^2a^2 - s^2a^2 + 2r^2da - 2srda + r^2d^2 - 2srd^2 + s^2d^2}{bs^2}$. pro F C,

Quo subtracto ex b, remanebit fractio, cuius dimidium erit:

$\frac{b^2s^2 - r^2d^2 + 2srd^2 - s^2d^2 - r^2a^2 + s^2a^2 - 2r^2da + 2srda}{2bs^2}$ pro BD, vel DF.

Ad Climacticum nimirum ascensum euitandum obseruetur $r^2 - s^2$, quæ cæteris notis magnitudinibus depressior est. Applicetur $2bs^2$ ad $r^2 - s^2$, hoc autem facto parabolismo proueniet nota quædam magnitudo; eaque appelletur c. Applicetur deinde plurinomium hoc. $b^2s^2 - r^2d^2 + 2srd^2 - s^2d^2$, ad $r^2 - s^2$, & proueniet planum non ignotum g^2. Cæterum a^2 per se subsistet. Applicetur denique $2r^2d + 2srd$, ad r^2, & prouenit latus f.

Itaque fractioni

$\frac{b^2s^2 - r^2d^2 + 2srd^2 - s^2d^2 - r^2a^2 + s^2a^2 - 2r^2da + 2srda}{2bs^2}$

Æquipollet huic $\frac{g^2 - a^2 - fa}{c}$. Huius quadratum est $\frac{g^4 + a^4 - 2g^2a^2 + f^2a^2 - 2g^2fa + 2fa^3}{c^2}$. Huic

$$\begin{array}{r} g^2 - a^2 - fa \\ g^2 - a - fa \\ \hline - g^2fa + fa^3 + f^2a^2 \\ - g^2a^2 + a^4 + fa^3 \\ g^4 - g^2a^2 - g^2fa \\ \hline \frac{a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4}{c^2} \end{array}$$

addatur quadratum perpendiculi nempe d^2, & fiet.

$\frac{a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4 + c^2d^2}{c^2}$

Quamobrem fiet æquatio

$a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4 + c^2d^2 = c^2a^2$; & per antithesin seu metathesin fiet.

c a +

$c^2a^2 + 2g^2a^2 + f^2a^2 + 2g^2fa - 2fa^3 - a^4 = g^4 + c^2d^2$. Et per ſpecierum Metamorphoſin noua proueniet æquatio, eaque ſimplicior, & in primis explicabilis. In locum igitur $c^2 + 2g^2 + f^2$, intelligatur ſubſtitui h^2, & loco $2g^2f$ intelligatur Kl^2, & loco $2f$, ſubrogetur m; denique loco $g^4 + c^2d^2$, intelligatur n^4. Proueniet igitur æquatio noua minus implicata $h^2a^2 + kl^2a - ma^3 - a^4 = n^4$. Cùm autem ad hanc formam ſit redacta, eaque ſit huiuſmodi, vt in ipſa $a^2 + a - a^3 - a^4 - n^4 = 0$; ſupereſt tantummodo, vt hæc quadrato-quadratica æquatio ad cubicam reuocetur, & ad illam in qua elatior poteſtas trinam dimenſionem habeat, cuius inquiſitum latus ſi non reperiatur, vt Problemati Geometricè ſatisfiat, ad vnam ex conicis ſectionibus confugiendum erit. Sic enim quæſiti trianguli latus minus innoteſcet. Sin autem inuenti lateris præſidio, duabus alijs æquationibus ordinatis iuxta Artis præcepta, quod quæritur feliciſſimè conſequemur; & vt in arenam deſcendamus, ſuperiorem æquationem repetamus.

$h^2a^2 + Kl^2a - ma^3 - a^4 - n^4 = 0$

Huius æquationis Radix comparabitur ſic

$25035127650\,Q + 4247477676000000\,R - 74880\,C - 1\,QQ = 46141781761334390625$.

Secundus terminus tolletur diuidendo 74880, numerum cuborum per 4; ex ponentem maioris characteris, fit enim quotiens 18720. Itaque cum in æquatione, tàm primus, quàm ſecundus terminus eodem ſigno − afficiatur; propterea vera radix augenda eſt, & quidem incremento quartæ partis ſuperiùs inuentæ.

Supponamus igitur $a - 18720$, æquari veteri, veræque radici; rurſus nouæ poteſtates ſic ſe habent.

$a - 18720$
$a - 18720$

00000
37440
131040
149760
18720

$-18720a + 350438400$
$a^2 - 18720a$

$a^2 - 37440a + 350438400$
$a - 18720$

$-18720a^2 + 7008768000a - 6560206848000$
$a^3 - 37440a^2 + 350438400a$

$a^3 - 56160a^2 + 10513152000a - 6560206848000$
$a - 18720$

$-18720a^3 + 1051315200a^2 - 196806205440000a + 122807072194560000$
$a^4 - 56160a^3 + 1051315200a^2 - 6560206848000a$

$a^4 - 74880a^3 + 2102630400a^2 - 262408273920000a + 122807072194560090$

Specie-

Speciebus autem absoluetur hunc in modum

Supponamus $e - \frac{1}{4}m$ æquari a; inde potestates ortæ sunt, vt sequuntur.

$$\begin{array}{rr} & e - \frac{1}{4}m \\ \text{Radix} & e - \frac{1}{4}m \\ \hline & -\frac{1}{4}me + \frac{1}{16}m^2 \\ & e^2 - \frac{1}{4}me \\ \hline \text{Quadratum} & e^2 - \frac{1}{2}me + \frac{1}{16}m^2 \\ & e - \frac{1}{4}m \\ \hline & -\frac{1}{4}me^2 + \frac{1}{8}m^2e - \frac{1}{64}m^3 \\ & e^3 - \frac{1}{2}me^2 + \frac{1}{16}m^2e \\ \hline \text{Cubus} & e^3 - \frac{3}{4}me^2 + \frac{3}{16}m^2e - \frac{1}{64}m^3 \\ & e - \frac{1}{4}m \\ \hline & -\frac{1}{4}me^3 + \frac{3}{16}m^2e^2 - \frac{3}{64}m^3e + \frac{1}{256}m^4 \\ & + e^4 - \frac{3}{4}m^2e + \frac{3}{16}m^2e^2 - \frac{1}{64}m^3e \\ \hline \text{Quadrato-quadratum} & e^4 - me^3 + \frac{6}{16}m^2e^2 - \frac{4}{64}m^3e + \frac{1}{256}m^4 \end{array}$$

In hac autem æquatione $h^2a^2 + Kl^2a - ma^3 - a^4 - n^4 = 0$.

Tollendus est secundus terminus iuxta Artis præcepta.

$$\begin{array}{rl} -e^4 + me^3 - \frac{6}{16}m^2e^2 + \frac{4}{64}m^3e - \frac{1}{256}m^4 & \text{Pro } -a^4 \\ -me^3 + \frac{3}{4}m^2e^2 - \frac{3}{16}m^3e + \frac{1}{64} & \text{Pro } -ma^3 \\ + h^2e^2 - \frac{1}{2}h^2me + \frac{1}{16}h^2m^2 & \text{Pro } + h^2a^2 \\ + Kl^2e - \frac{1}{4}Kl^2m & \text{Pro } + Kl^2a \\ -n^4 & \text{Pro } m^4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Seu } -e^4 * + \frac{3}{8}m^2e^2 - \frac{3}{16}m^3e - \frac{1}{256}m^4 \\ + h^2e^2 - \frac{1}{2}h^2me - \frac{1}{4}Kl^2m \\ -\frac{6}{16}m^3e + \frac{4}{64}m^3e - n^4 \\ + Kl^2e + \frac{1}{16}h^2m^2 \\ + \frac{1}{64}m^4 \end{array}\right\} \text{Hoc æquabitur } 0.$$

Et per specierum metamorphosin rursus ordinabitur æquatio.

Nempe sumatur quæcunque longitudo pro vnitate & appelletur u; fiat autem rectangulum sub u, & p, æquale coefficienti sub quadrato, sub eiusdem vnitatis quadrato, & sub q longitudine; fiat solidum æquale coefficienti sub latere; demum sub eiusdem vnitatis cubo, & sub r longitudine fiat plano-planum æquale comparationis homogeneo; ita vt sit æquatio $e^4 * + upe^2 - u^2qe - u^3r = 0$. Cumque vnitas supponatur u, ea de medio sublata fiet $e^4 * + pe^2 - qe - r = 0$. Seu $e^4 = * + pe^2 - qe - r$. Itaque p afficitur affirmatè q, & r negatè.

Propterea descripta sit Parabole A B C, cuius axis B D; latus autem rectum æquale assumptæ magnitudini pro vnitate, quæ sit T. Mox autem sumatur B X, æqualis dimidio ipsius T, vt punctum X, sit intra Parabolen, cuius vertex B; fiat autem X F, æqualis $\frac{1}{2}$ p. & accipiatur in B X, protracta ad partes X, cùm p, afficiatur nota +, & ex puncto F, erigatur perpendicularis F G æqualis $\frac{1}{2}$ q.

Deinde super G B, describatur semicirculus G I B, & protracta G B, ad partes B, accipiatur B L, æqualis T, lateri recto; & sumatur H B, æqualis r. Super H L, describatur semicirculus; mox accepta perpédiculari BK, interuallo Bk, describatur arcus KI, secans peripheriam G IB in I. Tunc centro G, ad interuallum GI, describatur circulus secans parabolen in A, S, C, ex hisce punctis ducantur ad axem perpendiculares, A Y, S V, D C.

Dico

Dico D C, esse propositæ æquationis radicem.

Quandoquidem B X, est $\frac{1}{2}$ siquidem dimidium est lateris recti, quod velut. 1. assumpsimus, atque X F: est $\frac{1}{2}$ p; proinde cum B D, sit quadratum ipsius D C, si D C, supponatur a; certè B D, erit a^2, hoc enim est propter naturam paraboles, vt ex Elementis Conicis manifestum est; Si igitur ex B D, quam dicimus esse a^2. auferatur $\frac{1}{2}$ p, & rursus $\frac{1}{2}$ remanebit $a^2 - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$. cuius quadratum est $a^4 - p a^2 - a^2 \maltese \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$. Itaque tantum erit quadratum ex D F, siue E G. Quoniam autem D C, supponitur a. & E D, supponitur $\frac{1}{2}$ q: tota E C, erit $a + \frac{1}{2} q$, cuius quadratum est $a^2 + q a + \frac{1}{4} q^2$. horum autem quadratorum aggregatum erit $a^4 - p a^2 + q a \maltese \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$, tantumque erit quadratum ex G C, atque adeo eius latus quadratum erit ipsa G C.

Quoniam autem H B, est r; factaque est B L, æqualis lateri recto quod est. 1. estque B K, media proportionalis inter H B, & B L, propterea B K, erit ℞ r. & B K. quadratum erit r; est autem I B, æqualis B K; proinde quadratum I B, erit r. Quoniam verò B F; est $\frac{1}{2} p + \frac{1}{2}$. & G F. est $\frac{1}{2}$ q: horum quadrata si simul addantur, faciunt $\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 \maltese \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$. tantumque erit quadratum ex G B, ex quo si subtraxeris r. quadratum ipsius I B, remanebit $\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p \maltese \frac{1}{4} - r$, pro quadrato ipsius G I; erat autem eiusdem quadratum idem quod quadratum G C; nempe $a^4 - p a^2 + q a + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$, erit proinde æquatio $a^4 - p a^2 + q a + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} - r$, & per antithesin proueniet demum æquatio inter a^4 & $\maltese\, p a^2 - q a - r$, itaut hæc sit æquationis formula $a^4 \ast \maltese\, p a^2 + q a - r$.

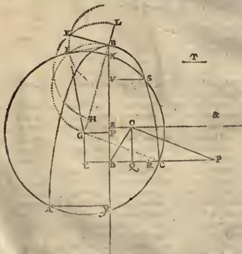
Quoniam verò huius æquationis radix excedit latus quæsiti trianguli quarta parte coefficientis sub cubo; propterea secetur R C, æqualis huiusmodi quartæ parti; mox autem protracta D C, vsque ad P, ita vt D P, sit æqualis datæ trianguli basi. Deinde secta DZ, quæ sit æqualis perpendiculari datæ, ex Z agatur Z &, parallela ipsi D P, centro autem D, ad interuallum D R, describatur arcus R O, secans F O & in O; agantur D O, O P. Dico triangulum D O P. Problemati satisfacere.

Eius enim basis D P, est æqualis datæ basi, eius etiam perpendicularis quæ est æqualis D Z, æqualis est perpendiculari datæ.

Dico iam aggregatum ex latere D O, & perpendiculari O Q, ad aggregatum ex eadem perpendiculari, & latere O P, habere datam rationem, &c.

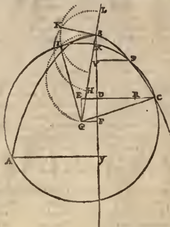
Hoc Problema iam pridem ab Authore propositum fuit resoluendum Ismaelo Bullialdo Mathematico Celeberrimo. Ipse verò in uno casu solutionem attulit.

Hoc idem Problema generali ratione ab Authore adinuentas ac supra explorata, resolui facilius patet. &c.



$27137758050\,c^2 - 565049066400000\,c - 44953368676760950625 - c^4 = 0$

Huius æquationis radix est 56745.



$BL = 1$
$XF = \frac{1}{2}p = 13568879025.$
$GF = \frac{1}{2}q = 282524533200000$
$BX = \frac{1}{2}.$
$BH = r = 44953368676760950625.$
$BK = ℞\, r = ℞\, 44951368767609506 25.$
$DC = c = 56745.$
$DC\ Quadr. = 3219995025.$
$BD = 3219995025.$
$BF = 13568879025\frac{1}{2}.$

Quoniam autem poteſt contingere vt $\frac{1}{2}$ p.quantitas ſuperet quadratum ipſius D C; Proinde tunc ita procedendum erit.

Sit expoſita quædam Parabole, cuius axis B Y; accipiatur latus eius rectum vnitatis loco, atque eius dimidium ſignetur in axe ſitque B X; mox verò ſecetur X F, æqualis $\frac{1}{2}$ p; fiat verò G F, æqualis $\frac{1}{2}$ q; agatur G B, ſuper quam deſcribatur ſemirculus G I B; deinde protrahatur G B, ad L, vt B L, ſit æqualis B, vnius dimidio; deinde facta ſit B H, æqualis R, & ſuper H L, deſcribatur ſemicirculum priorem ſecans in I; poſtmodum autem agatur GI. Centro G, interuallo autem G I, deſcribatur circulus ſecans parabolen in A, S, C; agaturque C D, perpendicularis ad YB, itempe SV; præterea A Y. Protrahatur CI, ad E, agaturque C E, parallela axi. Dico DC, eſſe radicem æquationis propoſitæ.

Quandoquidem D C, eſto a, & ob naturam paraboles B D, debet eſſe a^2. Hunc enim in modum ducta BD, in latus rectum poſitum vnum producetur quadratum ipſius DC. Quoniam igitur F B, eſt $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$; ſi ex ipſo auferatur BD, quod eſt a^2, remanebit $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - a^2$.

Huius autem quadratum eſt $a^4 - p\,a^2 - a^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$, eritque quadratum reſidui DF. Et quoniam DC eſt a, & GF, ſiue G D, eſt $\frac{1}{2}q$; propterea tota E C, erit $a + \frac{1}{2}q$. cuius quadratum eſt $a^2 + q\,a + \frac{1}{4}q$, quo addito ad $a^4 - p\,a^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$; prouenit $a^4 - p\,a^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + q + \frac{1}{4}q^2$, At verò quoniam D B eſt $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$ eius quadratum

eſt

est $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$; cui si addatur quad. ex E D, vel GF; fiet $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}q^2$; ex quo si subducatur quadratum ex B K, siue B I, remanebit, $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}q^2 - r$; & hoc erit quadratum ipsius G I, cui æquale est quadratum G C, superius habitum, quamobrem erit æquatio inter hæc; nimirum $a^4 + pa^2 + qa + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q^2 - r$; & per antithesin proueniet $a^4 = pa^2 - qa - r$.

Si itaque ex D C, radice æquationis, subtrahatur R C, quarta pars coefficientis subcubo, remanebit D R, pro latere quæsiti trianguli, videlicet pro latere illo, quod ponebatur radix.

Cùm Venetias me contulissem, casu quidem incidi in Virum honestum, grauem, officij plenum, cùm virtutibus, tùm etiam satis amplâ fortunâ exornatum, &, vt verbo dicam, numeris omnibus absolutum, qui summis, egregijsque laudibus Illustriss. ac Excellentiss. D. Io: Baptistã Cornelium Piscopiæ, D. Marci Procuratorem Amplissimum, extollebat, ob oculos ponens sanguinis claritudinem, atque magnificentiam, cum incomparabili humanitate coniunctam, cuius famâ vehementer incitatus, splendidissimam eius Domum adij: ab hoc præclariss., omnique laudationis genere præstantiss. Senatore beneuolè, ac humaniter exceptus: secum precibus egi, vt Bibliothecam, & mirè ornatam, & copiosam, quam apud ipsum extare iàm pridem audieram, mihi pro ea, qua pollebat humanitate, ostenderet. Eam igitur ingressus, Archimedis operibus euolutis, quæ super tabulam aduerteram, incidi in Lemma illud de applicatione rectæ inter conuexum peripheriæ, & diametrum pro luctam, Tùm extẽplo, ecce Virgo specie pulcherrima, membrorum apta dispositione, cum quadam suauitate coloris, maiestate capitis, oris dignitate, spectabilis, quæ disertè admodum ea de re sermonem instituit; hinc sẽsibus etsi quodammodo destitutus, vt vox faucibus hæserit; non nihil tamen collectis viribus, petij ab Excellentiss. Senatore, vt mihi quidem Nomen, Genus, Patriam Inclytæ Virginis, tot singularibus, & corporis, & animi dotibus, velut è Cœlo delapsæ, innueret; quod sine piaculo tacere non possum. Ipse verò subridens ait, nomine quidem Helenam Corneliam vocari. Tùm ego, tanti ne fortassis Herois filia? annuit; tùm, non mirum. Hanc nostri æui rectè dixeris Literarum miraculum Venetam Mineruam, omnes sibi gratias conciliantem; vt omnibus scientijs exculta, Virgo quidem Encyclopędica dicenda videatur. Studijs bonarum Artium miro ordine operam nauauit; præmissa etenim Grammatice, & Humanioribus literis, præsertim Rethoricæ, studuit. Linguas percallet quatuor exoticas, Græcam, Latinam, Gallicam, Hispanicam, in quibus disertè loquitur. His porrò non contenta, summi, ac illustris ingenij alis, ad altiores Doctrinas euecta, Dialecticæ, Philosophiæ sedulò operam dedit, ad Theologiæ culmen ascendens, excelsæ Doctrinæ penitiora quidem arcana peruadens: nec Mathematicas Disciplinas neglexit, aduertens, magni faciendum illud Platonis adagiũ: Οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; cuius supra quòque meminimus; & quidem par erat, vt in Astronomiam incumberet Virgo vitæ instituto purissima, quæ cogitatione saltem Cæli Galaxiam frequentaret. In hisce porrò studijs tantum profecit, vt erudito genere loquendi cunctis haud mediocrem admirationem injiciat: quodque etiam in primis est commendabile, ingenio pollet subtili, acri, & acuto, vt Musicen colat, concentum cieat suauissimum, Vocem fidibus ludens sic attemperet, vt Adstantium aures demulceat. Musa Veneta; Syren Adriaca; multò tamen suauior pulchritudinis harmonia, Cælitùs illi collata, cui animi virtutum melodia cælestis omninò respondet, ab Angelorum Choro deducta, adeò vt Principes multitudine plures ad sui amorem alliciat, inter quos reticere non possum, Lantgrauium Hassiæ Serenissimum, qui vnà cum Nuru Domum eius adiens, munificentissimè, ac singulariter exceptus, summis honoribus illam est prosecutus, Paria, nè maiora dicam, æstimationis obsequia Sereniss. Cardin. Boglionus Illustriss. Helenæ, singulares, atque præclarissimas virtutes admirans, præstitit. Nec desunt huius ordinis, qui ad Thalamos sacro iure connubij auidè peterent, nisi vni Christo eam addictam esse certò cognoscerent. Cæterum multùm Illa Fortunæ debet, quòd ipsa sit nacta Præstantissimum huius ætatis, Doctissimum, Omniscium, & Græcæ, & Latinæ Linguæ ad stuporem vsque Peritum, Illustriss. ac Reuerendiss. D. Aloysium Gradenicum Archipræsbyterum, atq; Primatem Præclarissimæ Vrbis Cydoniæ è Creta, Bibliophylacem Seren. Reipub. Ven., Virum suo nomine celeberrimum; Illam enim summâ diligentia, summâque curâ instruxit; nam aduertens viuido esse quidem ingenio, omnes eam disciplinas docuit, vt eandem sibi parem redderet; quo nihil exaggeratius dicere licet; nam vterq; portentum.

Helenæ Corneliæ laudes.

Hæc dicta sint de egregijs dotibus, quas ætas omnis commendabit, & euehet ad Cœlum; vnde & Cornelia Regia Prosapia, ac Serenissima Respublica in æternum viuet.

Sed quanti refert viam diligenter eligere, ad analysin instituendam, hinc plane addisces. Proponatur Problema de applicatione datæ magnitudine rectæ inter conuexum peripheriæ, & diametrum productam, quæ ad aliquod peripheriæ punctum protracta, pertingat; de quo supra verba fecimus. Plures quidem sunt casus, non æquè tamen difficiles. Si data magnitudine recta applicanda fuerit semidiametro æqualis; admodum facilis est resolutio; tunc enim punctum in peripheria designatur à recta, quæ ex centro erecta fit diametro perpendicularis.

Sit circulus A B C, cuius centrum D; ex D, erecta sit perpendicularis D B; ita vt recta K, magnitudine data sit æqualis semidiametro circuli prædicti, applicanda inter diametrum productam, ad partes exempli gratia A, & conuexum peripheriæ; vt protracta pertingat ad punctum B. Hoc nullius est laboris, si enim describatur Hexagonum, cuius latus HB, hoc verò protractum sit ad partes H, donec occurrat, diametro C A, protractæ in I; constat ex Elementis H I, æqualem esse semidiametro circuli; atque adeò rectæ datæ K, æqualem.

At si punctum B, itidem fuerit in extremitate quadrantis, recta verò applicanda, non fuerit æqualis semidiametro; Sit iam factum, & recta applicanda sit b; at semidiameter circuli sit d; ex centro D, cadens perpendicularis ad I B, faciat segmenta G B, H G, æqualia; Itaque segmentum B G, sit a, proinde segmentum H G, erit itidem a; quare H B, erit 2 a; at segmentum I G, erit $b + a$, vt tota I B, erit $b + 2a$; & quia vt patet ex Elementis, vt est I B, ad B D, ita B D, ad G B, erit rectangulum I B G, æquale quadrato ex B D, quare $ba + 2a^2$ æquabitur d^2; ergo $\frac{1}{2}ba + a^2$, æquabitur $\frac{1}{2}d^2$, cuius æquationis radix est $\sqrt{\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}d^2} - \frac{1}{4}b$; æquabitur a. Hinc.

PORISMA.

Recta applicanda secetur in quatuor partes æquales, & quadrato vnius ex illis addatur dimidium quadrati ex semidiametro circuli; aggregati autem latus mulctetur eadem quarta parte datæ applicandæ; quod enim superest, erit segmentum G B; vnde eius duplum erit H B, quare per additionem ad datam applicandam, innotescet I B;

Hoc cum illo coincidit.

Dato vno ex lateribus trianguli rectanguli, dataque differentia segmentorum baseos, reperire triangulum.

Sit iam factum, & triangulum illud rectangulum sit A C B, cuius latus circa rectum sit BC, nêpè d differentia segmentorum baseos sit A E, adeo vt segmentorum D B, AD, differentia AE sit b. Oporteat reperire triangulum Segmentum DB, esto a, at D E, erit illi æqualis itidem a; ergo E B, erit 2 a; quamobrem A B, erit $b + 2a$; propterea cùm sit vt A B, ad B C, ita B C, ad D B, erit rectangulum A B D, æquale quadrato B C, quare $ba + 2a^2$ æquabitur d^2; ergo $\frac{1}{2}ba + a^2$ æquabitur $\frac{1}{2}d^2$. Huius æquationis radix est $\sqrt{\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}d^2} - \frac{1}{4}b$, quæ æquabitur a, Hinc.

PORISMA.

Ad quadratum è quarta parte differentia segmentorum baseos addatur, dimidium quadrati lateris dati circa rectum, aggregati latus multatum eadem quarta parte differentia segmentorum baseos; exhibebit segmentum minus baseos, vnde segmentum maius non latebit, quare triangulum quoque constabit.

PROBLEMA.

Sit circulus A B E, cuius diameter A E protracta sit in infinitum ad partes F, datumque sit in peripheria punctum C, aptanda sit quadam data, vt B F, qua transeundo per C, ipsa linea data B F, sit intercepta inter peripheriam, hoc est inter peripheria concauum, & protractam diametrum A E.

Supponamus diametrum A E, esse b, at verò recta B F, magnitudine data sit d, ex puncto C, cadat perpendicularis C D, quæ appelletur f, segmentum verò D E, sit g, segmentum E F, sit a; quoniam igitur est, vt B F, ad F A, ità E F, ad C F; & A F, est b + a, B F, est d, insuper E F, est a, si fiat vt d, ad b + a, nempè B F, ad A F, ità a, hoc est E F, ad aliam, puta C F, hæc erit $\frac{ba+a^2}{d}$, & quia angulus C D F, est rectus, proptereà si à quadrato ex C F, hoc est ex $\frac{b^2a^2+2ba^3+a^4}{d^2}$, si ex hoc, inquam, auferatur quadratum ex C D, nimirum f^2, remanebit $\frac{b^2a^2+2ba^3+a^4}{d^2} - f^2$, & hoc erit quadratum ex D F, itaque ($\sqrt{\frac{b^2a^2+2ba^3+a^4}{d^2} - f^2}$) erit D F, & quia E F, est a, atque D E, est g, si ex D F, auferatur a, quod remanet æquabitur D E, nempè g, proindè $\sqrt{(\frac{b^2a^2+2ba^3+a^4}{d^2} - f^2)} - a$ æquabitur g, & per antithesin $\sqrt{(\frac{b^2a^2+2ba^3+a^4}{d^2} - f^2)}$ æquabitur g + a, quamobrem & eorum quadrata æqualia erunt, nempè $\frac{b^2a^2+2ba^3+a^4}{d^2} - f^2$ æquabitur $g^2 + 2ga + a^2$, omnibus ductis in d^2, ad tollendam fractionem, fiet $b^2a^2 + 2ba^3 + a^4 - d^2f^2$ quod æquabitur $d^2g^2 + 2d^2ga + d^2a^2$, & per antithesin rursus $b^2a^2 + 2ba^3 + a^4 - 2d^2ga - d^2a^2 = d^2g^2 + d^2f^2$, seu $a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2a^2 - 2d^2ga = d^2g^2 + d^2f^2$, reuocetur æquatio ad analogismum, & fiet vt $a^3 + 2ba^2 + b^2a - d^2a - 2d^2g$ ad $dg^2 + df^2$, ità d, ad a, Hinc.

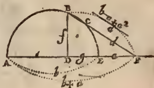


PORISMA.

Beneficio igitur Lineæ ad postremum genus Medicearum pertinentium, si fiat constructio, siue Effectio, hac resolutis plano-planis artificio iam explicato in simplicissimas longitudines, & repetitis Analyseos vestigijs, regia Euclidis via, demonstrabitur, vt supra docuimus, &c.

PROBLEMA.

Sit circulus A B E, cuius diameter A E, protracta sit in infinitum ad partes E, datumque sit in peripheria punctum B, aptanda sit inter diametrum productam, & conuexum peripheria data quadam C F, qua protracta ad partes C, perueniat ad datum punctum B.



Supponamus diametrum A E, esse b, at verò C F, magnitudine data sit d, ex puncto B, cadat perpendicularis B D, quæ appelletur f, segmentum verò D E, dicatur g, at verò segmentum E F, esto a. Quoniam igitur est vt C F, ad E F, ità A F, ad B F, & A F, est $b + a$, propterea fiat vt d, ad a, ita $b + a$, ad aliam, eaque erit $\frac{ba + aa}{d}$ tanta itaque erit B F; huius quadratum est $\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2}{d^2}$ à quo si auferatur quadratum ex B D, nempè f^2, remanebit $\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2}{d^2} - f^2$, eritque quadratum ex D F, itaque ipsa D F, erit $\sqrt{\left(\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2}{d^2}\right)}$ à qua si auferatur E F, nempè a, remanebit g, ac proindè fiet æquatio $\sqrt{\left(\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2}{d^2}\right)} - a = g$, & per antithesin $\sqrt{\left(\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2}{d^2}\right)} = g + a$, ergo & eorum quadrata æqualia erunt, quamobrem $\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2}{d^2}$ æquabitur $g^2 + 2ga + a^2$, & rursus per multiplicationem fiet æquatio, huiusmodi $a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2 = d^2g^2 - 2d^2ga + d^2a^2$, ductis nimirum omnibus in d^2, & rursus per antithesin, fiet $a^4 + 2ba^3 \begin{smallmatrix}+b^2\\-d^2\end{smallmatrix} a^2 - 2d^2ga = d^2g^2 + d^2f^2$, reuocata autem proportione ad analogismum, erit vt $a^3 + 2ba^2 \begin{smallmatrix}+b^2\\-d^2\end{smallmatrix} a - 2d^2g$ ad $dg^2 + df^2$, ità d ad a Hinc.

PORISMA.

Beneficio igitur lineæ ad postremum Medicearum genus pertinentium si comparetur effectio, hac resolutis plano-planis in simplicissimas longitudines, & repetitis Analyseos vestigiis regia Euclidis via demonstrabitur &c. Arte, quam superius tradidimus &c.



APPENDIX

DE MAXIMIS, ET MINIMIS.

Argumentum hoc ſubtiliter, & accuratè admodum, à Præclariſſimo Geometra Apollonio Pergæo fuiſſe tractatum Antiqua tamen Methodo, ex eius monumentis cuique perſpectum, ac manifeſtum eſſe poteſt; ſed idem non minori cum laude fuiſſe præſtitum à Franciſco Maurolyco Abbate Meſſanenſe, compertum eſt ijs, qui duos hac de re libros ab illo conſcriptos euoluerunt; adeo enim eggregie ſe geſſit, tantaque cum laude prouinciam ſuſcepit, vt Apollonij Libros defectum ſupplere contendens (hi namque nondum tunc temporis in lucem prodierant) teſtimonio Sapientum quaſi Apollonium ipſum, ferè ſuperauerit.

Cæterum haud mediocriter ad rem de qua agimus Recentiorum Analyſtarum induſtria conducit; hæc enim ſpecioſæ Logiſtices beneficio, præclara, & admiranda conſequitur; quamobrem non erit abs re ſi in hoc præſenti Capite de noua hac Methodo ſermonem inſtituamus, quod per aliquas Propoſitiones perficiemus.

PROPOSITIO I.

Maximum rectangulum contentum ſub duobus ſegmentis propoſiti lateris reperire.

Supponamus datum latus eſſe E F, ſiutque ſegmenta EG, G F; ſitque rectangulum quidem maximum, quod ſub huiuſmodi ſegmentis continetur. Oporteat cognoſcere vbinam G, punctum cadat.

E ——— G ——— F

Latus E F, dicatur b; ſegmentum E G, ſit a; itaque G F, erit $b - a$; quamobrem rectangulum E G F, erit $ba - a^2$; Hæc igitur ſit prima æquatio.

Supponamus deinde e, æquari 0; cùm ergo e nihil valeat, adhuc $a + e$ æquabitur ſegmento EG, & $b - a - e$ æquabitur ſegmento GF; Proinde rectang. EGF, æquabitur $ba - a^2 - 2ac + be - e^2$; ſed erat idem rectangulum E G F, æquale $ba - a^2$, ergo $ba - a^2$ æquabitur $ba - a^2 - 2ac + be - e^2$; & per antitheſin $ba - a^2 + 2ac + = ba - a^2 + be$; & rurſus $2ac + e^2 = be$; & per hypobibaſmum fiet $2a + e = b$. Supponamus autem e æquari 0; ſeu nihilo, proinde $2a$ æquabitur b; atque adeo $a = \frac{1}{2} b$. Vnde.

PORISMA.

Rectangulum igitur maximum eſt ſub ſegmentis dati lateris cum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

Hoc demonſtrauit Euclides Lib. 6. Propoſitione 27.

PROPOSITIO II.

Reperire maximum ſolidum, quod fieri poſſit ſub ſegmento propoſita rectæ lineæ.

Data ſit recta A B, quam oporteat ita ſecare, vt quod fit ſub altero ſegmento in alterius ſegmenti quadratum, ſit maximum omnium quæ ſub quacunque alia ſectione fieri poſſint.

A ——— B (b; a, b − a)

Propoſita recta eſto b; & ſegmentum vnum dicatur a, alterum vero $b - a$, ſolidum autem quod fit ex $b - a$ in a^2 eſt $ba^2 - a^3$; reliquum eſt vt determinemus punctum ſectionis, atque adeo ſegmentum a, ita vt ſolidum prædictum ſit omnium maximum.

Supponamus $e = 0$; atque ſegmentum vnum propoſitæ lineæ, eſto $a + e$, alterum enim erit $b - a - c$; quadratum vero ex $a + c$ erit $a^2 + 2ac + c^2$, quod ductum in b

$- a - c$, facit solidum $b a^2 - a^3 + 2 b a c + b c^2 - 3 a^2 c - 3 a c^2 - c^3$, quod æquabitur $b a^2 - a^3$; & per antithesin $2 b a c + b c^2 - 3 a^2 c - 3 a c^2 - c^3 = o$. Omnibus autem applicatis ad c, quod est hypobibasmum fecisse; fiet $2 b a + b c - 3 a^2 - 3 a c - c^2 = o$. Atque adeo, fiet etiam per antithesin $2 b a - 3 a^2 = 3 a c + c^2 - b c$. Quoniam autem c, æquatur o, proinde $3 a c + c^2 - b c$, valebit o, quare per antithesin fiet $2 b a = 3 a^2$. Omnibus applicatis ad a, fiet $2 b = 3 a$; Omnibus etiam diuisis per 3, fiet $\frac{2}{3} b = a$. Quamobrem segmentum positum a, erit æquale duabus tertijs partibus rectæ propositæ lineæ.

PORISMA.

Maximum solidum, quod applicatur lineæ cubo deficiens, est illud, quod tertiæ parti propositæ lineæ applicatur, & cubus adiacet duabus tertijs partibus datæ rectæ lineæ.

PROPOSITIO III.

Reperire solidum maximum, quod applicari possit dato plano, deficiens solido simile dato, solidumque datum, cui debet assimilari defectus, sit cubus.

Datum sit planum, illudque dicatur b pl. & oporteat illud ita secare; vt si segmento alteri applicetur solidum cubo deficiens, sit maximum omnium, quæ applicari possunt; deficentium figura simili, similiterque posita.

Quandoquidem deffectus cubus est; propterea oportet planum datum applicare lateri cubi deffectiui.

Latus istud esto a; alterum erit $\frac{b\,pl.}{a}$, quod in duo segmenta diuidetur, quorum vnum erit a, alterum verò erit $\frac{b\,pl.}{a} - a$ quæ quidem pars ducta in a^2. producet solidum applicatum, nempe $b\,pl.\,a - a^3$. Superest; vt determinetur quantitas ipsius a; itaut $b\,pl.\,a - a^3$, sit solidum illud maximum, applicatum b pl. deficiens cubo.

Supponamus c, æquari o. Atque latus vnum erit $a + c$, ad quod applicetur b pl. vt consurgat latus $\frac{b\,pl.}{a+c}$ cuius segmentum vnum erit $a + c$; alterum verò erit $\frac{b\,pl.}{a+c} - a - c$. Postremum hoc segmentum ductum in quadratum ipsius $a + c$, hoc est in $a^2 + 2 a c + c^2$ erit solidum applicatum, nimirum $b\,pl.\,a + b\,pl.\,c - a^3 - 3 a^2 c - 3 a c^2 - c^3 = b\,pl.\,a - a^3$, & per antithesin fiet $b\,pl.\,c - 3 a^2 c - 3 a c^2 - c^3 = o$. atque adeo rursus fiet $b\,pl.\,c = 3 a^2 c + 3 a c^2 + c^3$. Omnibus applicatis ad c, erit $b\,pl. = 3 a^2 + 3 a c + c^2$. Quoniam verò c, supponitur æquale o; proinde totum illud factum sub c, erit æquale o. Quamobrem b pl. æquabitur $3 a^2$, ac proinde tertia pars dati plani, erit quadrato ex a, æquale.

Quapropter maximum solidum erit, quod ad duas tertias partes propositi plani applicatur: Sumatur itaque tertia pars propositi plani, & inquiratur latus, quod illam potest ad quod applicatum sit b pl. vt emergat tripla longitudo lateris, cui facta est applicatio, huius enim duæ partes ductæ in reliquæ partis quadratum constituunt maximum solidum applicatum deficiens cubo. Vnde.

PORISMA.

Maximum solidum, quod potest applicari dato plano deficiens cubo, est illud quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani.

PROPOSITIO IV.

Reperire maximum plano-planum, quod possit applicari datæ lineæ deficiens plano-plano simili dato, atque datum, cui debeat assimilari defectus, sit quadrato-quadratum.

Data sit recta b; cui applicandum sit plano-planum, deficiens quadrato-quadrato, quod sit omnium maximum.

Secanda erit recta b; vt quod fit ex altero segmento in alterius segmenti cubum sit omnium maximum.

Rectæ quidem b; segmentum vnum sit a; alterum erit $b - a$; at verò plano-planum applicatum erit $b a^3 - a^4$; Oportet proinde determinare rationem partium a, & $b - a$, itaut

hoc

hoc productum fit omnium maximum. Esto e, æqualis o, seu nihilo; sitque segmentum vnum $a + e$ aliud vero sit $b - a - e$, cubus autẽ ex $a + e$ est $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$ quo ducto in $b - a - e$, fit productum, vt hic à latere cernis, & instituta operatione secundum Artis præcepta, adhibita congrui antithesi, denique peruenitur ad æquationem compositam hanc videlicet $3ba^2e + 3bae^2 + be^3 = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$, & per hypobibasmum prouenit æquatio $3ba^2 + 3bae + be^2 = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$. Vbi aduerte per primam antithesin, quando nempè subtrahitur $ba^3 - a^4$, quod superest æquale est nihilo; atque

$$
\begin{array}{r}
a + e \\
a + e \\
\hline
ae + e^2 \\
a^2 + ae \\
\hline
a^2 + 2ae + e^2 \\
a + e \\
\hline
a^2e + 2ae^2 + e^3 \\
a^3 + 2a^2e + ae^2 \\
\hline
a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 \\
b - a - e \\
\hline
-a^3e - 3a^2e^2 - 3ae^3 - e^4 \\
-a^4 - 3a^3e - 3a^2e^2 - ae^3 \\
ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 \\
\hline
ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 \\
ba^3 - a^4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 = 0$$
$$3ba^2e + 3bae^2 + be^3 = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$$
$$3ba^2 + 3bae + be^2 = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$$
$$3ba^2 = 4a^3$$
$$3b = 4a$$

adeò rursus per antithesin fit æquatio illa $3ba^2e + 3bae^2 + be^3 = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$; vnde omnibus applicatis ad e, fiet $3ba^2 + 3bae + be^2 = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$. Nunc autem reiectis omnibus ijs, quæ non potuerunt ab e, liberari; quandoquidem e, supponitur æquari nihilo, seu o; proinde fiet $3ba^2 = 4a^3$; omnibus autem applicatis ad a, fiet $3b = 4a$. Quamobrem a, vnde efformatur quadrato-quadratum, erit æquale tribus ex quatuor partibus ipsius b; atque adeò reliqua quarta pars eiusdem b, erit illa, cui applicandum erit maximum plano-planum.

PORISMA.

Maximum plano-planum, quod applicatur data lineæ deficiens quadrato-quadrato est id, quod applicatur quarta parti data lineæ, & quadrato-quadratum quod deficit, occupat tres quartas partes data lineæ.

PROPOSITIO V.

Reperire maximum plano-planum, quod possit applicari dato plano, cum defectu plano-plani similis dato, & datum, cui debeat assimilari defectus, sit quadrato-quadratum,

Datum sit b planum, cui applicandum sit plano-planum deficiens quadrato-quadrato sit autem huiusmodi plano-planum omnium maximum; est autem plano-plani segmentum futurum quadratum; vnde componitur quadrato-quadratum defficiens. Sit autem a, cui applicetur b plan. ex ipso autem quadratum est a^2, quo subtracto ex prædicto b plano, fiet reliquum b planum $- a^2$, quod ductum in a^2, facit plano-planum b plan. $a^2 - a^4$; quod erit plano-planum applicatum cum defectu quadrato-quadrati.

At verò in locum ipsius a^2, subrogetur $a + e$, atque e æquetur o, seu nihilo, fiat autem quadratum ex $a + e$, quod est $a^2 + 2ae + e^2$, quod si detrahatur ex b pl. fiet reliquum b pl. $- a^2 - 2ae - e^2$, quod quidem ductum in $a^2 + 2ae + e^2$ producet plano-planum; ex b

pl. $a^2 + 2$ pl. pl. ex b pl. $ae +$ pl. pl. ex b pl. $e^2 - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$. Ex quo si dempseris, superius factum, nempe pl. pl. ex b pl. $a^2 - a^4$, fiet reliquum 2 pl. pl. ex b pl. $ae +$ pl. pl. ex b pl. $e^2 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4 = 0$.

Per antithesin autem fiet 2 pl. pl. ex b pl. $ae +$ pl. pl. ex b pl. e^2 æquale $4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$; Omnibus autem applicatis ad e, fiet 2 b pl. $a +$ b pl. $e = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$; omnibus autem reiectis, quæ sunt sub e, cum e, æquetur 0, erit 2 b pl. $a = 4a^3$, omnibusque applicatis ad a, fiet 2 b pl. $= 4a^2$, ergo b pl. $= 2a^2$, quare $\frac{1}{2}$ b pl. æquatur a^2. Itaque a^2, occupat dimidium dati plani; & plano-planum, quod applicatur dato plano, deficiens quadrato-quadrato, est id, quod applicatur dimidio dati plani, seu duabus ex quatuor partibus dati plani, &c.

PORISMA.

Maximum plano-planum, quod applicatur dato plano, deficiens quadrato-quadrato, est id, quod applicatur duabus partibus ex quatuor, in quas diuiditur planum, & quadrato-quadratum, quod deficit, occupat reliquas duas partes.

PROPOSITIO VI.

Reperire maximum plano-planum, quod possit applicari dato solido, cum defectu plano-plani similis dato, & datum, cui debet assimilari defectus, sit quadrato-quadratum.

Sit datum b solid, cui sit applicandum plano-planum deficiens quadrato-quadrato; ipsum autem plano-planum debeat esse omnium maximum. Cum autem solidi segmentum ex quo fieri debet quadrato-quadratum deficiens, necesse & sit, esse cubum.

Esto igitur a, cui applicetur b sol. si autem ex a fiat cubus, proueniet a^3, quo subtracto a^3 ex b solido fiet reliquum b sol. $- a^3$, quo ducto in a proueniet pl. pl. ex b sol. $a - a^4$, quod erit plano-planum applicatum cum defectu quadrato-quadrati ex a.

At verò rursus loco ipsius a, substituatur $a + e$, at vero e, iuxta hanc resolutionis rationem æquetur 0, vel nihilo, erit quidem plano-planum applicatum deficiens quadrato-quadrato, plano-planum ex b sol. $a +$ pl. pl. ex b sol. $e - a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$ ex quo si dempseris superius iam factum, prosiliet pro differentia pl. pl. ex b sol. $e - 4a^3e - 6$ pl. pl. $a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$, quæ differentia æquabitur 0, seu nihilo per antithesin, ac omnibus applicatis ad e; fiet b sol. æquale $4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$ de medio sublatis ijs, quæ sub e reperiuntur in æquatione, cum æquentur nihilo fiet b solidum æquale $4a^3$, quare $4a^3 =$ b sol. vnde a^3 æqualem $\frac{1}{4}$ b sol. ex huiusmodi igitur quantitate puta a, cuius valorem expressimus effingi debet quadrato-quadratum, atque adeò plano-planum deficiens quadrato-quadrato applicabitur tribus ex quatuor partibus dati solidi &c. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-planum, quod applicatur dato solido, deficiens quadrato-quadrato, est illud, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati solidi, & quadrato-quadratum deficiens reliquam quartam occupat partem.

PROPOSITIO VII.

Reperire maximum plano-solidum, quod applicari possit data linea, deficiens quadrato-cubo.

Data sit recta b, cuius segmentum vnum esto a, aliud quidem erit $b - a$, quod autem fit ex $b - a$ in a^4, erit $ba^4 - a^5$; hoc erit autem plano-solidum quæsitum.

Supponamus verò vnum ipsius b segmentum esse $a + e$, alterum erit $b - a - e$, quadrato-quadratum ex $a + e$ est $a^4 + 4a^3e + 6e^2a^2 + 4ae^3 + e^4$, quod quidem ductum in $b - a - e$ facit $ba^4 + 4ba^3e + 6be^2a^2 + 4bae^3 + be^4 - a^5 - 5a^4e - 10e^2a^3 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$. Ex quo si dempseris $ba^4 - a^5$, fiet residuum $4ba^3e + 6be^2a^2 + 4bae^3 + be^4 - 5a^4e - 10e^2a^3 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$. Omnibus applicatis ad e, & ijs retentis; quæ ab e non afficiuntur, si quidem hæc nihilo æqualia supponuntur, atque etiam adhibita con-

tã congrua antithesi fiet $4 b a^3 = 5 a^4$, atque omnibus applicatis ad a^3; fiet $4 b = 5 a$. Vnde quatuor ex quinque partibus ipsius b, erunt æquales a. Itaque maximum plano-solidum, quod ipsi b, applicatur defficiens quadrato-cubo, erit quod applicatur quartæ parti ipsius b. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-solidum, quod applicatur data linea deficiens quadrato-cubo, est id, quod applicatur quinta parti data linea, & quadrato-cubus, qui deficit, occupat reliquas quatuor ex quinque partibus proposita linea.

PROPOSITIO VIII.

Reperire maximum plano-solidum, quod possit applicari dato plano deficiens quadrato-cubo.

Datum sit b planum, & ita sit instituenda operatio, vt præscribitur, erit autem opus ita b planum diuedere, vt si ex altero ipsius segmento fiat quadratum, & ex eodem latere fiat cubus quod fit ex reliquo plani in hunc cubum effictum, sit omnium maximum.

Segmentum iam dictum sit a^2; reliquum igitur plani, erit b pl. $- a^2$, quod ductum in a^3 producat plano-solidum applicatum, nempe b plan. $a^3 - a^5$.

Deinde, segmentum sit $a^2 + 2 a e + e^2$, supposito tamen quod e æquetur o, seu nihilo; reliquum plani erit b pl. $- a^2 - 2 a e - e^2$; quo ducto in cubum ex $a + e$, nempe in $a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3$, fiet b pl. $a^3 - a^5 - 5 a^4 e - 10 a^3 e^2 +$ 3 b pl. $a^2 e +$ 3 b pl. $e^2 a +$ b pl. $e^3 - 10 a^2 e^3 - 5 e^4 a - e^5$, ex quo si auferatur superius factum, nempe b pl. $a^3 - a^5$, fiet residuum 3 b pl. $a^2 e +$ 3 b pl. $e^2 a +$ b pl. $e^3 - 5 a^4 e - 10 a^3 e^2 - 10 a^2 e^3 - 5 e^4 a - e^5$. Omnibus autem applicatis ad e, ijs tantum seruatis, quæ ab e liberantur, & congrua adhiaita antithesi; fiet 3 b pl. $a^2 = 5 a^4$, facto autem parabolismo per applicationem ad a^2 prosiliet 3 b pl. $= 5 a^2$, vnde ex quinque partibus in quas intelligitur b pl. esse diuisum, tres quidem æquales erunt ipsi a^2.

At cum ex a^2, efformandus sit quadrato-cubus, quo applicatum maximum plano-solidum debet deficere; ipsum plano-solidum, quod applicatur dato plano, defficiens vt diximus erit id, quod applicatur reliquis duabus, ex quinque partibus, propositi plani. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-solidum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato-cubo est id quod applicatur duabus ex quinque partibus dati plani, & quadrato-cubus, quo applicatum deficit, occupat tres reliquas partes eiusdem plani.

PROPOSITIO IX.

Reperire maximum plano-solidum, quod possit applicari dato solido, deficiens quadrato-cubo.

Datum sit b solidum, & faciendum sit quod imperatur. Itaque b sol. ita secandum erit, vt si alterum segmentum ipsius effingatur in cubum, quod fit ex reliquo solidi in quadratum huius effiicti cubi, sit maximum omnium eorum, quæ fieri possunt, si quomodocunque, aliter, datum solidum secetur.

Segmentum igitur sit a^3 reliquum itaque erit b sol. $- a^3$; quod ductum in a^2 producit plano-solidum applicatum b solido $a^2 - a^5$.

Supponamus prædictum segmentum esse $a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3$; nempe cubum ex $a + e$; fiet reliquum b sol. $- a^3 - 3 a^2 e - 3 a e^2 - e^3$, quo ducto in $a^2 + 2 a e + e^2$, prouenier b sol. $a^2 +$ 2 b sol. $a e +$ b sol. $e^2 - a^5 - 5 a^4 e - 10 a^3 e^2 - 10 a^2 e^3 - 5 a e^4 - e^5$. Ex hoc verò demendũ est prius factum scilicet ex b sol. $a^2 - a^5$, reliquum verò applicetur ad e, reiectis ijs, quæ cum e implicantur, & facta antithesi, proueniet 2 b sol. $a = 5 a^4$, omnibus autem applicatis ad 5 a fiet $a^3 = \frac{2}{5}$ b solidi. At verò ex a^3 efformandus est a^5; ob id plano-solidum applicatum dato solido deficiens quadrato-cubo id, quod applicabitur reliquis tribus ex quinque partibus dati solidi. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-solidum, quod applicatur dato solido deficiens quadrato-cubo est id, quod applicatur tribus ex quinque partibus dati solidi, & quadrato-cubus, quo solidum applicatum deficit, reliquas duas occupat partes.

PROPOSITIO X.

Reperire maximum plano-solidum, quod possit applicari, dato plano-plano deficiens, quadrato-cubo.

Datum sit b pl. pl. & oporteat facere, quod est iniunctum, erit secandum b pl. pl. itaut si ex altero ipsius segmento efficiatur quadrato-quadratum, quod fit ex reliquo plano-plani in latus ipsius quadrato-quadrati sit maximum omnium eorum, quæ fieri possunt; quocunque modo plano-planum sectum fuerit.

Segmentum primò sit a^4; reliquum igitur erit b pl.pl. $- a^4$, quod ductum in a, producet plano-solidum applicatum b pl.pl. $a - a^5$.

Deinde segmentum sit $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$, nempè quadrato-quadratum ex $a + e$, supposito tamen, quod e æquetur o, seu nihilo, reliquum igitur segmentum erit b pl.pl. $- a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$, quod ductum in $a + e$ producit factum ex b pl.pl. $a +$ b pl.pl. $e - a^5 - 5a^4e - 10a^3e^2 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$. Ex hoc autem si detrahatur prius factum nempe b pl. pl. $a - a^5$ reliquum autem applicetur ad e reiectis ijs, quæ remanent implicata cum e, & congrua adhibita antithesi, proueniet æquatio $5a^4 =$ b pl.plano, si verò vtraque pars diuidatur per 5, fiet $a^4 = \frac{1}{5}$ b plano-plani. At cum ex a^4 effingi debeat quadrato-cubus, erit plano-solidum applicatum dato plano-plano deficiens quadrato-cubo, id quod applicatur reliquis quatuor ex quinque partibus, in quas dictum iam plano-planum supponitur esse diuisum. Hinc.

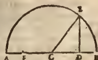
PORISMA.

Maximum plano solidum, quod applicatur dato plano-plano, deficiens quadrato-cubo est, id quod applicatur quatuor ex quinque partibus dati plano-plani, & quadrato-cubus quo plano-planum applicatum deficit, reliquam quintam occupat partem.

PROPOSITIO XI.

Maximum rectangulum reperire, quod sub media, & differentia trium proportionalium comprehenditur.

Quandoquidem si fuerit recta diuisa vtcunque, & super ipsam descriptus sit semicirculus; ex puncto autem diuisionis, excitetur recta vsque ad semicirculi peripheriam.



Dimonstratum est in Elementis hanc excitatam esse medio loco proportionalem inter illa segmenta. Deinde super datam A B, diuisam in D, intelligatur descriptus semicirculus, & ex puncto D, excitata sit recta perpendicularis, quæ ad ipsam peripheriam perueniat in E, nam A D, D E, D B, proportionales erunt. Secetur autem F C, æqualis C D. Supponamus rectangulum maximum esse F D E. Oportet inquirere diuisionis punctum D.

Supponamus A C, vel C B, esse b, at verò C D, C F, esse a. Segmentum A D, erit $b + a$, & reliquum segmentum D B, erit $b - a$. Itaque $2a$, æquabitur F D; Quoniam autem A D, æqualis est $b + a$, & D B, æqualis est $b - a$, erit rectangulum A D B, idem quod $b^2 - a^2$. Et quia rectangulum A D B, æquale est quadrato D E, siquidem A D, D E, D B, sunt proportionales, latus igitur potens rectangulum A D B, æquabitur quadrato D E; atque adeò ℞$(b^2 - a^2)$ æquabitur D E; at verò si ℞$(b^2 - a^2)$ ducatur in $2a$, proueniet ℞$(4b^2a^2 - 4a^4)$ pro rectangulo comprehenso sub E D, & F D; Seruetur

autem

autem ℞$(4b^2a^2 - 4a^4)$ cum hoc enim instituenda erit comparatio, vt mox planum fiet.

Supponamus e, æquari o, æquari C D, vel C F; itaque $b + a + e$, æquabitur segmento A D, quemadmodum $b - a - e$, æquabitur D B; ac proinde ipsa differentia F D, erit $2a + 2e$; rectangulum verò sub A D, & D B, est $b^2 - a^2 - 2ae - e^2$; itaque E D, erit ℞$(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)$, quæ si ducatur in $2a + 2e$, nempè F D, proueniet rectangulum sub F D, D E, nimirum ℞$(4b^2a^2 - 4a^4 + 8b^2ae + 4b^2e^2 - 16a^3e - 24a^2e^2 - 16ae^3 - 4e^4)$ quod æquabitur ℞$(4b^2a^2 - 4a^4)$ atque adeo etiam $4b^2a^2 - 4a^4 + 8b^2ae + 4b^2e^2 - 16a^3e - 24a^2e^2 - 16ae^3 - 4e^4$, quod æquabitur $4b^2a^2 - 4a^4$, & per antithesin $8b^2ae + 4b^2e^2$; æquabitur $16a^3e + 24a^2e^2 + 16ae^3 - 4e^4$, & per hypobibasmum $8b^2a + 4b^2e$, æquabitur $16a^3 + 24a^2e + 16ae^2 - 4e^3$.

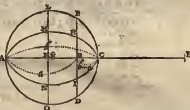
Continuanda autem æquatio est in ijs, quibus e, deest; ac proinde $8b^2a$, æquabitur $16a^3$, factoque parabolismo, nimirum omnibus diuisis per 8, proueniet $b^2a = 2a^3$, & per hypobibasmum $b^2 = 2a^2$, & rursus per parabolismum $\frac{1}{2}b^2 = a^2$; atque adeo ℞$\frac{1}{2}b^2$ æquabitur a. Hinc.

PORISMA.

Est igitur quæsitum segmentum C D, id quod potest dimidium quadrati ipsius A C, vel C B.

PROPOSITIO XII.

A data circuli peripheria arcum abscindere, ita vt rectangulum sub eius corda, in sagittam, sit maximum.



Datus sit circulus A B C, cuius centrum G. diameter A C. Oportet ab eius peripheria arcum abscindere, ita vt rectangulum sub eius corda in sagittam, sit omnium maximum.

Supponamus arcum esse B C D, itaut corda eius ducta in sagittam AE, faciat rectangulum omnium maximum. Inquirendum est igitur punctum E.

Supponamus A C, esse b, & A E, esse a ergo E C, erit $b - a$, rectangulum sub his est $ba - a^2$, cuius latus est ℞$(ba - a^2)$ quod æquale est ipsi E B; Ducatur E B, nempe ℞$(ba - a^2)$ in A E, puta a, & proueniet ℞$(ba^3 - a^4)$ pro rectangulo AEB, cuius duplum erit rectangulum sub A E, & B D, scilicet 2℞$(ba^3 - a^4)$ seu ℞$(4ba^3 - a^4)$ seu 4℞$(ba^3 - a^4)$

Nunc supponamus A E, esse $a + e$, nam E C, erit $b - a - e$ rectangulum autem sub his est $ba + be - a^2 - 2ae - e^2$. Itaque eius latus, puta ℞$(ba + be - a^2 - 2ae - e^2)$ æquabitur B E. Si igitur ℞$(ba + be - a^2 - 2ae - e^2)$ ducatur in $a + e$, proueniet ℞$(ba^3 +$ &c.$)$ quod æquabitur ℞$(ba^3 - a^4)$ atque adeo $ba^3 +$ &c. æquabitur $ba^3 - a^4$. Hæc autem in sequentibus clara, manifestaque fient.

$$a + e$$
$$a + e$$
$$\overline{ae + e^2}$$
$$a^2 + ae$$
$$\overline{a^2 + 2ae + e^2}$$

$$b - a$$
$$a$$
$$\overline{ba - a^2}$$

$$\sqrt{(ba - a^2)} \qquad a$$
$$a$$
$$a \qquad \overline{a^2}$$

$\sqrt{(ba^3 - a^4)}$. Rectangulum AEB.

$$b - a - e$$
$$a + e$$
$$\overline{be - ae - e^2}$$
$$ba - a^2 - ae$$
$$\overline{ba + be - a^2 - 2ae - e^2}$$

$\sqrt{(ba + be - a^2 - 2ae - e^2)}$ BE.

$$ba + be - a^2 - 2ae - e^2$$
$$a^2 + 2ae + e^2$$
$$\overline{bae^2 + be^3 - a^2e^2 - 2ae^3 - e^4}$$
$$2ba^2e + 2bae^2 - 2a^3e - 4a^2e^2 - 2ae^3$$
$$ba^3 + ba^2e - a^4 - 2a^3e - a^2e^2$$

$$\overline{ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 = ba^3 - a^4}$$
$$- 4a^3e$$
$$- 6a^2e^2$$
$$- 4ae^3$$
$$- a^4$$
$$- e^4$$

$$3bae^2 + be^3 + 3ba^2e = 4a^3e$$
$$+ 6a^2e^2$$
$$+ 4ae^3$$
$$+ e^4$$

$$3bae + be^2 + 3ba^2 = 4a^3$$
$$+ 6a^2e$$
$$+ 4ae^2$$
$$+ e^3$$

$$3bae + be^2 = 4a^3 - 3ba^2$$
$$+ 6a^2e$$
$$+ 4ae^2$$
$$+ e^3$$

$$4a^3 - 3ba^2 = 3bae + be^2$$
$$- 6a^2e$$
$$- 4ae^2$$
$$- e^3.$$

Tandem igitur $4a^3$, æquabitur $3ba^2$, & per hypobibasmum fiet $4a = 3b$. Instituto parabolismo, fiet $a = \frac{3}{4}b$. Vnde.

PORISMA.

Diuidatur diameter in quatuor partes aquales, quarum tres constituent, partem vnam; reliqua verò constituet partem alteram; & hoc modo rectangulum sub sinu recto, seu semichorda, & sagitta, seu maiori parte diametri erit omnium rectangulorum maximum, quare duplum, nempe sub eadem maiori parte diametri, & chorda erit omnium maximum. In supradictorum tamen declarationem, hac adnotanda sunt nempe, quod in illa aquatione.

b a3

$ba^3 + ba^2e + 3bae^2 + be^3 = ba^3 - a^4$
$- 4a^3e$
$- 6a^2e^2$
$- 4ae^3$
$- a^4$
$- e^4$

Vt constat, ex vtraque parte extat $ba^3 - a^4$; ob id, si fiat antithesis, transpositione facta eorum, quæ signo $-$ afficiuntur, proueniet æquatio hunc in modum $3bae^2 + be^3 \ast 3ba^2e = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$; & instituto parabolismo, fiet æquatio $3bae + be^2 + 3ba^2 = 4a^3 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$; & per antithesin fiet $3bae + be^2 = 4a^3 - 3ba^2 + 6a^2e + 4ae^2 + e^3$, & rursus itidem per antithesin fiet $4a^3 - 3ba^2 = 3bae \ast be^2 - 6a^2e - 4ae^2 - e^3$. Et quia e, supponitur æquari nihilo, & quod in nihilum ducitur facit nihil; ob id, fiat rursus antithesis, per additionem $- 3ba^2$, ex vtraque parte & proueniet $4a^3 = 3ba^2 + 3bae + be^2 - 6a^2e - 4ae^2 - e^3$; nam vt diximus, nihilum ductum in aliquid, vel contra, nihil facit, atque adeò $3bae + be^2 - 6a^2e - 4ae^2 - e^3$ quæ nihil propterea valent, proinde remanebit æquatio $4a^3 = 3ba^2$; hæc igitur simplex æquatio occurrit, atque adeò inde colligitur facto parabolismo ipsius a, valorem esse $\frac{3}{4}b$: & illud quod supra posuimus Porisma colligitur.

Illud porrò addendum est, quod non vna est linea B E, quæ ducta in A E, facit maximum rectangulum, omnium eorum scilicet, quæ fieri possunt à segmento diametri A C, in semiordinatim applicatam; atque adeò nec etiam vnicam esse B D, quæ ducta in prædictum segmẽtum, facit maximum rectangulum; sed si descripta sit ellipsis, circa A C, quemadmodum A H C I, adhuc rectangulum sub H E, & A E, est omnium maximum, quæ fieri possunt à semiordinatim applicata in segmentum eiusdem A C, atque adeò, & eius duplum, nempè sub H I, & A E, est omnium maximum, quæ sub ordinatim applicata, & segmento eiusdem A C.

Hoc autem hunc in modum ostendemus; Quoniam rectangulum abs B E, in A E, ad quodcunque aliud, factum ex semiordinatim applicata in circulo, in diametri segmentum, proportionem habet maioris inæqualitatis, vt paulò antea demonstratum fuit; eadem autem est proportio rectanguli sub H E, & A E, ad quodlibet aliud factum à semiordinatim applicata, in diametri segmentum; ergo etiam rectangulum sub H E, & A E, est omnium maximum.

Quod autem rectangulum sub H E, & A E, ad quodlibet aliud, sensu iam dicto, proportionem habeat maioris inæqualitatis, sic ostendemus: Eadem est proportio rectanguli sub B E, & A E, ad quodlibet aliud à semiordinatim applicata circuli in segmentum diametri, quæ est rectanguli sub H E, & A E, ad quodlibet aliud à semiordinatim applicata ellipseos in idem segmentum diametri; sed in circulo proportio est maioris inæqualitatis; ergo etiam in ellipsi.

Quod verò eadem sit proportio, sic ostenditur; sumatur quoduis punctum K, in diametro, & per illud agatur ordinatim applicata L K O, occurrens ellipsios perimetro in M N; Quoniam igitur est a, vt rectangulum A E C, ad rectangulum A K C, ita quadratum E H, ad quadratum K M; vt verò rectangulum A E C, ad rectangulum A K C, ita quadratum E B, ad quadratum K L; ob id vt quadratum E B, ad quadratum K L, ita quadratum E H, ad quadratum K M; quare vt E H, ad K M, ita E B, ad K L; & permutando vt E H, ad E B, ita K M, ad K L, ergo b vt rectangulum A E H, ad rectangulum A E B, ita rectangulum A K M, ad rectangulum A K L; quare permutando vt rectangulum A E H, ad rectangulum A K M, ita rectangulum A E B, ad rectangulum A K L; seu vt A E B, rectangulum, ad rectangulum A K L, ita rectangulum A E H, ad rectangulum A K M; &

a 11 pr. Conic. Apoll.
b pri. 6. Elem.

quia

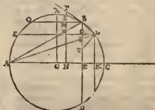
quia ita se res habet de alijs quibuscunque rectangulis, dummodò antecedentia rectangula eiusdem sint altitudinis, item eiusdem etiam altitudinis sint consequentia rectangula.

Quæ autem diximus de rectangulis à semiordinatim applicatis in sibi respondentia diametri segmenta, eadem quoque intelligenda sunt de rectangulis ab ordinatim applicatis in eadem diametri segmenta.

Imò illud itidem accedet, quod rectangulum ab aggregato semiordinatarum, quarum vna ad circulum, alia ad ellipsim pertinet, in diametri segmentum est maximum; vnde rectangulum ab H D, in A E, omnium est maximum. Vt enim rectangulum A E H, ad quodlibet aliud in ellipsi proportionem habet maioris inæqualitatis, & rectangulum A B D, ad quodlibet aliud in circulo proportionem habet maioris inæqualitatis, ita rectangulum sub H D, & A E, ad quodlibet aliud in Figura A M H C D Θ, proportionem habebit maioris inæqualitatis; vnde est maximum.

Hinc etiam sequitur rectangulum sub H B, & A E, omnium esse maximum; non dissimili enim discursu concludetur; maximum, inquam, omnium, quæ fieri possunt sub diametri segmento, & differentia inter ordinatim applicatas, quarum vna ad circulum, alia ad ellipsim pertinet.

Cæterùm Geometricè, quod initio propositum fuit, sic ostendemus præmissa Analysi. Sit rectangulum A E B, itaut E B, sit dimidium totius BD, subtendentis arcum B C D, trientem totius peripheriæ. Dico maius esse alio quocunque A H I, vel A K L. Intelligatur ducta BM, ad angulos rectos ipsi H I, quæ ducta intelligenda est parallela ipsi E B, atq; adeò perpendicularis diametro A C, cum hæc sit ad rectos angulos cum BD; & deinde acta sit A B, item IB.



RESOLVTIO.

Quoniam igitur rectangulum sub A E, & E B, maius est rectangulo sub A H, & H I, ergo A E, ad A H, maiorem habebit rationem, quam H I, ad E B; hoc est B E, ad H N; seu H M, ad H N, maiorem habebit rationem, quàm H I, ad E B, seu H I, ad H M. Quod ita se habet; Sunt enim tres rectæ H I, H M, H N, ita vt maior sit excessus rectæ H M, supra H N, quàm H I, supra H M. Quod sic ostendetur. Intelligatur B M, protracta ad O, erit quidem O B, subtendens sextam partem totius peripheriæ, cum B D, subtendat trientem; est enim O B, parallela ipsi A C, quæ cum B D facit in E, angulos rectos; Quare arcus O B, est æqualis arcui A O; sed O I, est minor, quàm O B; ergo minor, quàm A O; quare angulus O B I, minor erit angulo A B O, seu angulus M B I, minor erit angulo M B N; est autem angulus I M B, æqualis angulo N M B; est enim vterque rectus, & latus M B, vtrique triangulo commune; ergo, vt mox ostendemus, latus M I, erit minus latere M N.

At verò, si latus B M, commune fuerit vtrique triangulo, angulus B M I, fuerit æqualis angulo B M N, & angulus M B I, fuerit minor angulo M B N, latus M I, debere minus esse latere M N, sic ostenditur.

Ad punctum B, intelligatur factus angulus M B P, æqualis angulo M B N; & recta MI, protracta sit in P. Quoniam ergo in duobus triangulis P M B, N M B, duo anguli PMB, P B M, æquales sunt duobus N M B, N B M, vterque vtrique, & adiacent æqualibus lateribus, imo vni communi M B; ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia erunt; ob id latus M P, æquabitur lateri M N; sed M I, minus est latere M P; ergo M I, minus erit latere M N.

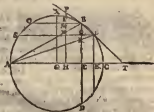
COMPOSITIO.

Quoniam igitur HM, ad HN, maiorem habet rationem, quam HI, ad HM, ergo B E, ad HN, maiorem habebit rationem, quam HI, ad HM: sed vt EB, ad HN, ita A E, ad AH, ergo AE, ad AH, maiorem habebit rationem, quàm HI, ad HM, seu ad E B, quare rectangulum sub AE, & EB, maius erit rectangulo sub AH, & HI. Quod oportebat ostendere.

Non dissimiliter procedendum, cum punctum I, fuerit in apice quadrantis; at si fuerit inter quadrantis apicem vt punctum O, vel inter A, & O, &c. manifestum est rectangulum semper esse minus, quàm quod sub AG, & sub perpendiculari ex G, ad quadrantis apicem; ergo multò magis minus erit rectangulo sub AE, & EB.

Quod si punctum I, caderet inter B, C, vt in L, sic procedendum,

RESOLVTIO.



Quoniam igitur rectangulum sub AE, & EB, maius est rectangulo sub AK, & KL, seu rectangulum sub AK, & KL, minus est rectangulo sub AE, & EB; ergo BE, ad KL, maiorem habebit * rationem, quàm AK, ad AE; Quod ita se habet; Nam intelligatur producta BL, ad partes L, ita vt occurrat diametro productæ in T. Quoniam igitur arcus AD, est triens circumferentiæ, erit æqualis arcui DCB, sed DCB, est maior arcu DCL, ergo arcus AD, maior erit arcu DCL, ergo angulus ABD, maior erit angulo DBL, hoc est angulus ABE, maior erit angulo EBT; est autem angulus AEB, æqualis angulo TEB; vterque enim est rectus; latus verò EB, commune est vtrique triangulo; ergo basis AE, maior erit base ET; vt mox constabit; ergo AE, multo maior erit, quam KT, ergo EK, ad KT, maiorem habebit rationem, quàm ad AE; ergo componendo ET ad KT, seu EB, ad KL, maiorem habebit rationem, quàm AK, ad AE; Quod oportebat, &c. * 16. sept. Pap.

COMPOSITIO.

Quoniam igitur maior est proportio rectæ EB, ad rectam KL, quàm AK, ad AE, ergo rectangulum sub EB, & AE, maius erit rectangulo sub AK, & KL.

Vel quia EB, ad KL, maiorem habet rationem, quam AK, ad AE; ergo AE, ad AK, maiorem habebit * rationem, quam KL, ad EB; quare rectangulum sub AE, & EB, maius erit rectangulo sub AK, & KL. Quod erat operæ pretium ostendere. * 16. quinti.

Quod si rectangulum sub AE, EB, est maximum, etiam eius duplum, nempè sub AE, BD, maximum erit.

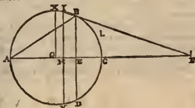
Idem tamen paulò aliter, si præmissum sit, quod etiam supra adhibitum est.

LEMMA.

Si duo triangula habuerint latus lateri aequale, alter autem adiacentium angulorum, in uno, sit aequalis alteri adiacentium in altero, reliquus adiacentium in primo, sit maior reliquo adiacentium in secundo, etiam latus maiori angulo oppositum, maius erit latere quod minori angulo opponitur.

Sed id elementare est. Hoc præmisso.

Intelligatur ducta I B, quæ ad partes B, protracta occurrat diametro productæ (occurret autem vt patet ex Elementis) ad partes C, nempè in F; & protrahatur IH, ad V.



RESOLVTIO.

a 16.7. Pappi. b 19. quinti. Quoniam igitur rectangulum sub A E, & E B., maius est rectangulo sub A H, H I, ergo A E, ad A H, maiorem habebit a rationem quàm H I, ad E B, sed vt H I, ad E B, ita HF, ad E F, ergo A E, ad A H, maiorem habebit rationem quàm H F, ad EF, ergo b diuidendo HE, ad A H, maiorem habebit rationem, quàm H E, ad E F; vnde E F, maior erit, quàm AH. Quod ita se habet, angulus enim A B D, insistit arcui A D, trienti totius peripheriæ at verò angulus V I B, insistit arcui V D B, qui maior est triente, vtpote maior arcu D C B, est igitur angulus A B D, seu A B E, minor angulo V I B, seu D B F, seu E B F. In duobus igitur triangulis A B E, E B F, latus E B, vtrique triangulo commune est; angulus autem A E B, æqualis est angulo F E B, vterque enim est rectus; angulus verò E B F, maior est angulo E B A, ergo ex eo, quod præmisimus Lemmate; latus E F, maius erit latere AE, ergo multo maius recta AH.

COMPOSITIO.

c 18. quinti. d 16. 7 Pappi. Quoniam igitur E F, maior est, quàm A H, recta H E, ad A H, maiorem habebit rationem, quàm ad EF; quarè c componendo AE, ad A H, maiorem habebit rationem, quàm H F, ad E F; hoc est H I, ad E B. Proinde rectangulum sub AE, & EB, maius erit d rectangulo sub A H, & H I.

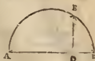
Hæc autem, cum punctum I, ceciderit inter B, X; vel in ipso puncto X, quadrantis apice. At verò si cadat in quadrante A X, inter A, X, manifestum est, vt superiùs in alia resolutione ostendimus, rectangulum factum à recta cadente ex assumpto puncto perpendiculari ad diametrum, in segmentum diametri inter A, & punctum, vbi cadit perpendicularis, minus esse rectangulo sub A E, E B.

Quod si punctum I, cadat inter B, C, vt in L, non dissimili discursu, ac supra concludetur rectangulum sub A E, E B, maius esse quocunque ex rectangulis factis, à perpendiculari, ex puncto assumpto in arcu sextante B C, in diametrum, in diametri segmentum, inter A, & punctum, vbi perpendicularis cadit, &c.

Punctum sit e. g. L, ex L, cadat perpendicularis in diametrum, & ex B, per L, intelligatur ducta recta occurrẽs diametro productæ, & procedatur non absimili modo ac prius.

PROPOSITIO XIII.

Reperire maximum rectangulum, comprehensum sub media, & maiori extrema trium proportionalium.



Sit A B, ſupra quam deſcriptus ſit ſemicirculus A E B, at vero A B, ſecta ſit in D, itaut ex D, erecta ſit perpendicularis D E, erunt quidem A D, D E, D B, tres proportionales; quarum media D E.

Supponamus autem rectangulum A D E, eſſe maximum; nempe contentum ſub maiori extrema AD, & media D E.

Sit A B, æqualis b, & A D, æqualis a, ergo D B, erit $b - a$ rectangulum ſub his eſt $ba - a^2$, quare $ba - a^2$, erit quadratũ ex DE, itaq; ipſa DE, erit ℞ $(ba - a^2)$ ducatur autẽ a, nempe A D, in ℞ $(b^2 a - a^2)$ ſcilicet D E, & proueniet ℞ $(ba^3 - a^4)$ tantum igitur erit rectangulum ſub A D, & D E.

Nunc ſupponendum A D, eſſe $a + e$, itaque D B, erit $b - a - e$, rectangulum ſub his eſt $ba + be - a^2 - 2ae - e^2$, itaque eius latus, puta ℞ $(ba + be - a^2 - 2ae - e^2)$ æquabitur D E, ſi igitur ℞ $(ba + be - a^2 - 2ae - e^2)$ ducatur in $a + e$ proueniet id quod æquabitur ℞ $(ba^3 - a^4)$ id verò, quod prouenit eſt ℞ $(ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - a^4 - e^4)$ Itaque $ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - a^4 - e^4$, eſt quod æquabitur $ba^3 - a^4$, & per antitheſin, aliaq; præcepta adhibita in ſuperiori Problemate, peruenietur ad hanc æquationem $a = \frac{3}{4} b$. Hinc.

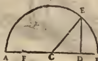
PORISMA.

Maior extrema è tribus proportionalibus, debet eſſe æqualis tribus quartis partibus aggregati extremarum, ſi rectangulum ſub maiori extrema & media, debet eſſe maximum.

Cæterum ridiculum foret inquirere maximum rectangulum ſub media, & minori extrema, è tribus proportionalibus; dum enim creſcit minor extrema, creſcit & media, quo ad fiant tres rectæ æquales, vnde nequit aſſignari rectangulum ſub minori extrema, & media, ita vt illud maximum ſit omnium, quod cuique perſpectum, ac manifeſtum eſſe poteſt.

PROPOSITIO XIV.

Reperire maximum rectangulum comprehenſum, ſub media, & differentia extremarum trium proportionalium.



Supponamus ſuper A B, deſcriptum eſſe ſemicirculum A E B. Sit autem C, centrum, atque ſegmentum C D, æquale ſit ſegmento C F; ſegmentorum verò A D, D B, differentia eſt F D, at ſi ex D, erecta fuerit perpendicularis D E, erit ipſa D E, media proportionalis inter A D, D B.

Supponamus rectangulum F D E, eſſe maximum; Quæritur punctum D, ſeu quam relationem habeat A D, ad DB, vel FD, ad D B, &c. Sit b, æqualis AC, vel C B, at vero a, ſit æqualis C D, vel FC, igitur $b + a$ æquabitur AD, & $b - a$, æquabitur DB, & $2a$, æquabitur F D; Cum igitur AD, æquetur $b + a$, & DB, æquetur $b - a$, igitur ducatur $b + a$ in $b - a$, vt fiat $b^2 - a^2$, differentia enim laterum ducta in eorundem aggregatum facit differentiam quadratorum, itaque quadratum ex DE, erit $b^2 - a^2$, quare DE, æquabitur ℞ $(b^2 - a^2)$ & quia F D, erat $2a$, ducatur $2a$ in ℞ $(b^2 - a^2)$ & proueniet $2a$ ℞ $(b^2 - a^2)$ ſeu ℞ $(4b^2a^2 - 4a^4)$ ſeu quod idem eſt 4, ℞, $b^2 - a^2$, vtamur autem modo ℞ $(4b^2a^2 - a^4)$.

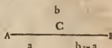
Supponamus nunc e, æquari o. Itaque $a + e$, æquabitur C D, vel CF, proinde $b + a + e$, æquabitur AD, & $b - a - e$, æquabitur DB, inſuper $2a + 2e$, æquabitur FD, rectangulum igitur AD B, eſt $b^2 - a^2 - 2ae - e^2$, & E D, erit ℞ $(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)$ rectangulum verò ſub FD, & ED, erit $4b^2a^2 - 4a^4 + 8b^2ae + 4b^2e^2 - 16a^3e - 24a^2e^2 - 16ae^3 - 4e^4$, quod æquabitur $4b^2a^2 - 4a^4$, & per antitheſin fiet $8b^2ae + 4b^2e^2 = 16a^3e + 24a^2e^2 + 16ae^3 - 4e^4$, & per hypobibaſmũ $8b^2a + 4b^2e = 16a^3 + 24a^2e + 16ae^2 - 4e^3$. Aboletis membris in quibus adeſt nota e, ſeruatiſque cæteris, fiet æquatio $8b^2a = 16a^3$ & facto paraboliſmo omnibus nempe applicatis ad 8, proueniet æquatio $b^2a = 2a^3$, & per hypobibaſmum fiet $b^2 = 2a^2$, ergo quod idem eſt $2a^2 = b^2$, & per paraboliſmum fiet $a^2 = \frac{1}{2} b^2$, quamobrem a, æquabitur ℞ $\frac{1}{2} b^2$. Hinc.

PORISMA,

Dimidium differentiæ extremarum, æquatur ei, quod poteſt dimidium quadrati ex dimidio aggregati earundem extremarum; quando rectangulum ſub media, & differentia extremarum eſt omnium maximum, &c.

PROPOSITIO XV.

Datum latus diuidere in duo ſegmenta, vt ex ijs quadratorum aggregatum, ſit omnium minimum.



Datum ſit latus A B, & oporteat facere quod imperatum eſt. Latus propoſitum ſupponatur b, ſint autem ſegmenta A C, CB, ita vt quadratorum aggregatum ex ipſis, ſit omnium minimum. Oporteat reperire punctum C; ſegmentum AC, eſto a, ergo ſegmentum B C, erit $b - a$; quadratum autem ipſius a, eſt a^2, & quadratum ex $b - a$ eſt $b^2 - 2ba + a^2$, quadratorum aggregatum eſt $b^2 - 2ba + 2a^2$, hoc autem ſeruandum eſt, vtpotè illud, cum quo inſtituenda eſt comparatio.

Supponamus e, æquari o; atque A C, eſſe $a + e$; at vero G B, eſſe $b - a - e$, harum partium quadrata ſunt ipſius quidem $a + e$, eſt $a^2 + 2ae + e^2$, & ipſius $b - a - e$, eſt $b^2 - 2ba - 2be + a^2 + 2ae + e^2$; aggregatum horum eſt $b^2 - 2ba - 2be + 2a^2 + 4ae + 2e^2$; quamobrem erit æquatio $b^2 - 2ba - 2be + 2a^2 + 4ae + 2e^2 = b^2 - 2ba + 2a^2$; & per antitheſin $4ae + 2e^2 = 2be$, omnibuſque applicatis ad e, fiet $4a + 2e = 2b$; quo circa erit $4a = 2b$; atque adeò $2a$, æquabuntur b. Hinc.

PORISMA.

Latus diuidendum eſt dimidium partis quæſitæ quocirca, ſi latus biſariam diuidatur, aggregatum quadratorum ex ipſis partibus, eſt omnium minimum.

COROLLARIVM.

Ex his facilè intelligis, minimum aggregatum quadratorum à partibus lineæ diuiſæ, duplum eſſe maximi rectanguli, ſub partibus eiuſdem lineæ.

Oſtenſum eſt enim ſupra rectangulum maximum ſub ſegmentis dati lateris, illud eſſe, quod ſub æqualibus lateribus continetur, atque adeò eſt quadratum à dimidio datæ lateris, at vero nunc conſtat minimum aggregatum quadratorum à ſegmentis dati lateris illud eſſe, quod conſtat à quadratis partium, ſeu partium quarum vtraque eſt dimidium totius lateris diuidendi; hoc autem aggregatum eſt duplum quadrati à dimidio, ſeu rectanguli maximi, ergo minimum quadratorum aggregatum eſt duplum rectanguli maximi, &c.

Extat iam in Conicis demonſtratum.

PROPOSITIO XVI.

Si parabolen recta linea contingat conueniens cum diametro extrà ſectionem, quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipſam, & contingentem interijcitur; & in locum qui eſt inter contingentem, & ſectionem alia recta linea non cadet.

In autem ſic aſſequemur.

Data ſit ſemiparabola C G, cuius diameter ſit F G, vt in perimetro ſeu linea parabolica C G, datum ſit punctum C, ſit autem recta C L K, recta, quæ tangat parabolen in C, puncto; recta verò F G, ſit protracta ad partes G. Propoſitum ſit inquirere punctum K, vbi tangens occurrit productæ diametro in K. Oportet igitur inquirere G K, relatam ad G F, quam ſcilicet rationem habeat,

Ducta sit C F, ordinatim ad diametrum F G, quæ data erit, ſumaturque punctum L, in C k, arbitrarium, agaturque LIM, parallela ipſi C F, manifeſtum eſt LM, maiorem eſſe, quàm IM, Triangulum CI k, ſimile eſt triangulo LMK, eſt autem I, punctum, interſectio lineæ L M, cum linea parabolica C I G, erit igitur ob paraboles naturam, vt F G, ad M G, ita quadratum CF, ad quadratum IM, ſed quadratum CF, ad quadratum IM, maiorem habet rationem, quàm quadratum CF, ad quadratum LM, & quadratum CF, ad quad. LM, eſt ob ſimilitudinem triangulorum, vt quadratum F K, ad quadratum M K, ergo FG, ad MG, maiorem habet rationem, quàm quadratum FK, ad quadratum M K. His præhabitis.

Supponamus F G, eſſe b, at F K, eſto a. Supponamus deinde e, æquari FM, ſeu o; erit quidem MG, idem quod $b - e$, & Mk, erit $a - e$; vt autem F G, ad M G, ita quadratum F K, ad quadratum MK, proinde vt b ad $b - e$, ita a^2 ad $a^2 - 2ae + e^2$, ergo $ba^2 - 2bae + be^2$ æquabitur $ba^2 - ea^2$, & per antitheſin fiet $be^2 + ea^2 = 2bae$ inſtituto paraboliſmo, fiet æquatio $be + a^2 = 2ba$; eſt autem be, idem quod o; ob id fiet æquatio $a^2 = 2ba$, & per hypobibaſmum erit $a = 2b$. Itaque F K, quæ ponebatur a, æquatur duplę F G, quæ ponebatur b, vnde FG, GK, ſunt inter ſe æquales; quod contendit Apollonius propoſitione ſupra citata. Hinc.

P O R I S M A.

In omni parabola recta linea contingens conueniens cum diametro extra ſectionem, quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipſam, & contingentem interycitur & in locum, qui eſt inter contingentem & ſectionem, alia recta linea non cadet.

Demonſtratio eſt in Conicis Elementis.

P R O P O S I T I O XVII.

Si hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam contingat quędam recta linea conueniens cum tranſuerſo figuræ latere, & à tactu recta linea ad diametrum ordinatim applicetur erit vt linea quæ interycitur inter contingentem, & terminum traſuerſi lateris ad interiectam inter eandem, & alterum lateris terminum, ita linea quæ eſt inter ordinatim applicatam, & terminum lateris ad eam quæ eſt inter eandem, & alterum terminum; adeò vt continuatæ inter ſe ſint, quæ ſibi ipſis reſpondent: & in locum, qui inter contingentem, & ſectionem interyicitur altera recta linea non cadet.

Methodo autem ſuperiori hunc in modum colligere licebit relationem rectæ Fk, ad alias quantitates.

Supponamus H G, eſſe rectam ſupra quam centro D, deſcriptus ſit ſemicirculus H C G, itaut diameter ſit H G. Sit autem C, punctum in peripheria vbi recta C K, tangit circulum ipſum, occurrens diametro protractæ in K. Quod autem quæritur eſt punctum k. Ducta ſit CF, ordinatim ad diametrum, at verò in recta Ck, ſit aſſumptum pro arbitrio punctum L, ſitque ducta linea LIM, parallela ipſi CF; eſt autem LM, maior, quàm IM, triangulum verò C F K, ſimile eſt triangulo L M k; ſunt enim æquiangula. At verò, vt oſtendit Apollonius in Conicis Elementis vt eſt rectangulum H F G, ad rectangulum H M G, ita quadratum CF, ad quadratum IM, at verò quadratum C F, ad quadratum IM, maiorem habet rationem, quàm quadratum C F, ad quadratum LM, & vt quadratum CF, ad quadratum LM, ita eſt quadratum FK, ad qua-

quadratum M K, ergo rectangulum H F G, ad rectangulum H M G, maiorem habebit rationem, quàm quadratum F K, ad quadratum M K.

Supponamus b æquari F G, & d, æquari H F; at verò a æquari F k; sed e, æquari F M, & o, seu nihilo; erit igitur H M, idem quod d † e, at M G, erit b -- e; sed M K, erit a -- e, quare vt rectangulum H F G, ad rectangulum H M G, ita quadratum F k, ad quadratum M K, itaque vt b d, ad -- e d -- e^2 † b d † b e, ita a^2, ad a^2 -- 2 a e † e^2, proinde fiet æquatio b d a^2 -- 2 a e b d ✠ e^2 b d = -- e d a^2 -- $e^2 a^2$ † b d a^2 † b e a^2; & per antithesin fiet -- 2 a e b d ✠ e^2 b d = -- e d a^2 -- $e^2 a^2$ ✠ b e a^2, & per hypobibasmum -- 2 a b d † e b d = -- d a^2 -- e a^2 † b a^2 est autem e, æqualis o, seu nihilo, ex hypothesi, quare -- 2 a b d = -- d a^2 ✠ b a^2, & per hypobibasmum fiet -- 2 b d = † b a -- d a, & per antithesin d a -- b a = 2 b d quare per parabolismum fiet a = $\frac{2bd}{d-b}$. Itaque F k, erit $\frac{2bd}{d-b}$, nempe quantitas ortiua ex applicatione dupli rectanguli b d, ad differentiam inter d & b, hoc est dupli rectanguli H F G, ad differentiam inter H F, & F G. Itaque erit, vt d -- b, ad ℞ 2 b d, ita hoc ad a, seu vt d -- b, ad d ita 2 b, ad a. Hinc.

Est enim EM æqualis o.

PORISMA.

In omni Circulo, vt est differentia segmentorum diametri ad segmentum maius, ita duplum segmentum minus, ad interceptam inter ordinatim ductam à qua diametri segmenta ipsa designantur, & punctum occurrens, ipsius tangentis, cum diametro protracta.

In omni igitur circulo tangens occurrens diametro protractæ, ita se habet, vt si secetur F N, æqualis F G, erit H N, excessus quo H F, superat F G, atque ut H N, ad H F, ita N G ad F K.

PROPOSITIO XVIII.

Ad ellipsim quod attinet, non dissimili argumentatione procedendum.

Data sit ellipsis circa diametrum H G, sit autem in H C G, punctum C, in quo recta CLK, tangit ellipsim occurrens diametro protractæ in K. Quæsitum est punctum K, in quo HG, cum C K, se mutuò intersecant.

Ducta sit CF, ordinatim ad diametrum, at in CK, intelligatur acceptum quoduis punctum L, ductaque sit LIM parallela ipsi CF; est autem LM, maior ipsa I M; totum enim est sua parte maius; quoniam vero L M, parallela est rectæ C F, erit triangulum CFK, simile triangulo LM K; est autem ex ijs quæ demonstrat Apollonius vt rectangulum HFG, ad rectangulum HM G, ita quadratum C F, ad quadratum IM; at quadratum C F, ad quadratum IM; maiorem habet rationem, quàm quadratum CF, ad quadratum LM, vt verò quadratum CF, ad quadratum LM, ita quadratum F K, ad quadratum M K; propterea rectangulum H F G, ad rectangulum HMG, maiorem habebit rationem, quàm quadr. FK, ad quadr. M K.

Supponendum est autem FG, esse b, at HF, esse d; item FK, esse a. Sit autem e, æqualis FM, atque o, seu nihilo; erit quidem HM, æqualis d † e, & MG, erit b -- e, vt MK, erit a -- e, quare rectangulum H F G, ad rectangulum HMG, vt quadratum FK, ad quadratum M K, proinde, vt b d ad -- e d -- e^2 † b d † b e, ita a^2, ad a^2 -- 2 a e † e^2; atque adeò b d e a^2 - 2 a e b d † e^2 b d, æquab. - e d a^2 - $e^2 a^2$ † b d a^2 † b e a^2, &c. & per hypobibasmũ, fiet -- 2 a b d † e b d = -- d a^2 -- e a^2 † b a^2; cumque e, æquetur o, seu nihilo erit -- 2 a b d = -- d a^2 † b a^2, & per hypobibasmum, fiet -- 2 b d = † b a -- d a, & per antithesin, fiet d a -- b a = 2 b d; Instituto parabolismo fiet a = $\frac{2bd}{d-b}$. Igitur fiet analogismus, vt in circulo dictum fuit, vt d -- b, ad d, ita 2 b, ad a, Itaque,

Est enim FM æqualis o.

PORISMA.

In omni ellipsi, vt est differentia segmentorum diametri, ad segmentum maius, ita duplum segmentum minus, ad interceptam inter ordinatim ductam, à qua segmenta ipsa designantur, & punctum occursus ipsius tangentis cum diametro protracta.

Sequitur de Hyperbole; sed de hoc alibi.

Mihi autem hactenus allata meditanti, fama retulit præclarissimum Michael Angelum Riccium, omnigena virtute cumulatissimum, ætatisque nostræ splendorem, ac decus, Romæ, vt cætera, ita hæc summa cum laude tractasse, proprioque marte in his, quamplurima reperisse, adeò quidem eximia, vt nihil supra; quamobrem animum statim ad eum inuisendum appuli, ratus, si eum alloquerer, multa, & quidem sublimia, non dum alijs perspecta me cognosciturum; Romam propterea festinans petij, ac eum adiens, plenum humanitatis æquè, ac doctrinæ cognoui; post multa denique protuli, *Auxit præsentia famam*; tanta siquidem est qua pollet ingenij uis, atque solertia, vt ad veritatis indagationem, Naturæ non incolsultò diceres illum Interpretem. Cùm autem & de rebus Physicis, & Mathematicis, plura inter loquendum attulisset in medium, denique Lucubrationes præstantissimas aperuit, ac inter cætera generalem rationem Effectionum Geometricarum, pro quocunque Problematum genere, vnà cum eorumdem Problematum determinandi ratione. Hæc cum eruditissimis uiris Anglis visa sint digna prælo, propterea annis proximè anteactis Typis commissa sunt, quorum imitatione, ad communem vtilitatem, hic tanti Ingenij nobilissimum fœtum subijciam; vnde, vt ex vngue Leonem, eius perspicacitatem, ac eruditionem summam addisces. *Michael Angeli Riccii laus.*

DEFINITIONES.

1 Potestatem quamlibet, eiusque radicem, voco dignitatem.

2 Si Dignitas in Dignitatem ducatur, vt A 2, in B 3, fiet productũ A 2 in B 3; cui producto illud simile dicimus, quod gignitur ex dignitatibus graduum eorumdem. Ita, in facta hypothesi, productum E 2 in C 3, ex quadrato & cubo, simile est producto A 2 in B 3.

3 Homogenea producta sunt, quæ ad eundem gradum pertinent; vt duo rectangula, quippè quæ ad secundum gradum pertinent; & duo solida, quæ ad tertium.

4 Terminos cum dico, intelligi volo duos numeros, seu æquales, seu inæquales, vel numerum & vnitatem, vel duas vnitates. Terminos inæquales appello duos inæquales, vel numerum, & vnitatem. Terminos autem æquales, duos æquales numeros, vel duas vnitates.

5 Productum in linea fieri secundum terminos datos, aut positos, dicimus, quum illud fit ex duabus dignitatibus, quarum exponentes sunt ipsi termini dati, vel positi; radices verò segmenta illius rectæ lineæ sectæ in proportione terminorum eorumdem.

Sit verbi causa, quæpiam recta linea, cuius maius segmentum ad minus sit in ratione 3 ad 2; productum ex cubo segmenti maioris in quadratum minoris erit factum in linea data secundum terminos positos 3, & 2; quia segmenta quæ sunt dignitatum radices habent rationem numeri 3 ad 2, & exponentes earumdem dignitatum sunt etiam 3, & 2.

Rursus esto quemadmodum segmentum maius ad minus eiusdem lineæ, sic 3 ad 1, productum ex cubo maioris segmenti in segmentum ipsum minus, erit productum in linea factum secundum terminos positos, numerum & vnitatem. Ita, A 3 in B 1 [si A vocetur maius segmentum, B verò, minus] est productum factum in linea A † B secundum terminos 3, & vnitatem, quia radices A & B sic sunt, vt est numerus 3 ad vnitatem; & dignitatis A 3 exponens est, 3, numerus datus; dignitatis B 1 exponens est, vnitas, item data.

Lemma primum.

Si duæ rectæ in eadem ratione secentur, producta similia facta ex segmentis, tanquàm ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis, quæ fient ex totis.

Sint A B, D E, rectæ, in punctis C, & F, ita sectæ, vt

A———C———B   D———F———E

ctæ, vt quam rationem A C ad C B habet, eandem habeat D F ad F E, & fiant ex illarum segmentis producta A C 2 in C B 3, & D F 2 in F E 3, quæ sunt similia per secundam definitionem; ijsque homogenea producta fiant ex totis A B, D E, nimirum A B 5, D E 5, per tertiam definitionem. Dico A C 2 in C B 3 eandem rationem habere ad A B 5, ac D F 2 in FE 3 ad DE 5. Quia rationes ex quibus ratio producti AC 2 in CB 3 ad AB 5 componitur, eædem sunt ac componentes rationem producti DF 2 in FE 3 ad DE 5; ob sectionem linearum proportionalem, & inde proportionales dignitates ex quibus producta illa resultant. Quod, &c.

Lemma secundum.

Ijsdem positis, Dico; si AC 2 in CB 3 fuerit maximum omnium similium productorum ex binis segmentis rectæ A B, etiam D F 2 in F E 3 fore maximum productorum similium ex binis segmentis rectæ DE, tanquam ex radicibus.

Singulis enim productis ex segmentis rectæ DE alia respondent orta ex segmentis rectæ AB in eadem proportione sectæ; & illa ad homogeneum suum DE 5 eandem rationem habent, atque ista ad suum AB 5, ex primo Lemmate. Ratio quidem AC 2 in C B 3 ad AB 5, ex hypothesi, est eadem, ac ratio DF 2 in FE 3 ad DE 5: cæterorum verò productorum ex segmentis ipsius DE ad DE 5, eadem est atque ratio productorum sibi respondentium, quæ fiunt ex segmentis rectæ AB, ad AB 5. Cùm igitur ratio AC 2 in CB 3 [quod maximum esse ponitur] ad AB 5 sit maior, per Octauam quinti Element. ratione cæterorum productorum sibi similium ad AB 5; maior etiam erit ratio DF 2 in FE 3 ad DE 5, quàm ratio cæterorum similium productorum ex segmentis rectæ D E ad D E 5; ac proinde ipsum D F 2 in FE 3 per decimam quinti Elem. est maximum. Quod, &c.

Lemma tertium.

Si data recta linea secetur in ratione terminorum inæqualium, & diuidendo, fiat segmẽtorum differentia ad minus segmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; hæc inuenta proportionalitas, vel ipsa erit proportionalitatis æqualitatis, vel alia, in quam incidemus, iterum diuidendo, & sic deinceps; & in ea terminorum differentia æquabitur minori termino, & differentia segmentorum segmento minori.

Esto AC ad CB, vt 9 ad 6, & A D differentia segmentorum AC, CB: erit diuidendo, 3 ad 6, vt A D, ad C B, vel ad segmentum sibi æquale, D C: Quoniam verò hæc proportio non est proportio æqualitatis, fiat D E differentia segmentorum AD, & DC; 3, differentia numerorum 6 & 3; & diuidendo, erit, vt 3 ad 3, sic DE ad AD, proportio æqualitatis,

Rursus A C sit ad C B, vt 5 ad 3; & AD segmentorum differentia; diuidendo erit, AD ad CB, seu ad sibi æquale segmentum DC, vt 2 ad 3. Et iterum diuidendo [segmentorum A D & D C, esto, differentia, E C,] 1 ad 2 vt EC ad AD seu DE; & tertiò [facta FE terminorum D E & E C differentia] diuidendo inueniemus, vt 1 ad 1, ita F E ad E C. Quod, &c.

Ratio Lemmatis est, quod duorum quorumcumque numerorum differentia, vel differentia numeri & vnitatis, semper est numerus aut vnitas, vt per se patet: & nos diuidendo, semel atque iterum, ac sæpius, demimus semper minorem terminum diuisæ proportionalitatis qui est numerus vel unitas, de maiori termino seu numero, vtimurque deinceps residuo tantùm [quod est eorum terminorum differentia] & comparamus illud cum minori termino proportionalitatis diuisæ: at non possumus sic demendo progredi in infinitum, quia vnitates in terminis sunt finitæ, sed exhauritur tandem omnis differentia, residuumq; maioris termini proportionalitatis diuisæ æquatur termino minori. Ita fit proportio æqualitatis, in qua vnitas ad vnitatem, vel numerus ad sibi æqualem numerum, est vt segmentum

mentum ad aliud æquale segmentum. Quod ostendere oportebat.

Quod si ab ea proportione æqualitatis, in qua desitum est, rursus incipiamus, Dico nos componendo gradatim, venturos per vestigia diuisionis ad terminos primæ proportionalitatis, in qua segmenta datæ lineæ erant in ratione inæqualium terminorum. Cuius propositionis rationem facilè intelliget Geometra, quem latere non potest, in Geometria omnia quæ diuidendo concluduntur, ex contrario conuerti posse, & componendo concludi illud ipsum, quod ponebatur ante diuisionem, vt in quinto Elem. ostenditur. Exempli gratia, sit maius segmentum datæ rectæ ad minus, vt 2 ad 1. Igitur diuidendo 1 ad 1, est vt differentia segmentorum ad minus segmentum. Ex hac porrò æqualitatis proportione componendo redimus ad primam proportionem, in qua segmenta erant in ratione 2 ad 1. Quod, &c.

Lemma quartum.

Si duo quælibet producta orta sint ex duabus dignitatibus ductis in aliam communem dignitatem; quam rationem habent illæ duæ dignitates inter se, eandem habent duo producta. Sic productum A B 3 in B C 5 eam rationem habet ad productum A B 3 in E F 5, quam habet dignitas BC 5 ad dignitatem EF 5; in quas duas dignitates ducta communis dignitas AB 3 illa producta effecit.

Ex definitione multiplicationis probatur hoc Lemma, quod alij in numeris demonstrarunt.

Lemma quintum.

Datis quatuor quãtitatibus, quarũ prima ad secundã habeat minorẽ rationẽ, quàm tertia ad quartam, productum quod gignitur ex duabus extremis est minus producto ex medijs.

Augeatur prima donec fiant quatuor Geometricè proportionales; tunc prima in quartam ducta efficiet productum æquale producto ex medijs. Igitur productum quod efficiebat ante quàm augeretur, erat productum minus eodem producto ex quantitatibus medijs. Quod, &c.

THEOREMA I.

Productũ in aliqua recta linea factũ secundũ positos terminos æquales, maximum est omniũ similium productorum, quæ fieri possunt ex binis lineæ datæ segmentis tanquam ex radicibus.

A ——————C——D—————— B

Recta linea AB secetur æqualiter in puncto C, & sit AC ad CB vt 3 ad 3 [termini æquales positi] Dico productum AC 3 in C B 3, quod fit in linea A B secundum positos terminos, esse omnium similium productorum maximum. Sumpto quolibet alio puncto D, faciamus aliud simile productum A D 3, in D B 3. Cum autem sint quatuor lineæ Arithmeticè proportionales cum excessu C D, nimirum AD, AC, CB, & BD, minor est ratio maximæ AD, ad AC, quàm CB ad BD; & triplicata ratio ipsius A D ad A C [seu ratio A D 3 ad AC 3] minor est, quam triplicata ipsius CB ad BD [seu CB 3 ad BD 3] & per quintum Lemma, productũ ex medijs quantitatibus, AC 3, in CB 3, maius est producto AD 3 in BD 3 facto ex duabus extremis. Eodem pacto demonstratur AC 3 in CB 3 esse alio quocumque simili producto maius, & consequenter omnium similium maximum. Quod, &c.

THEOREMA II.

Si duo rectæ lineæ segmenta fuerint in ratione terminorum inæqualium, & per consequens, diuidendo sit, differentia segmentorum ad minus segmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; quoties ex dignitate differentiæ segmentorum ducta in dignitatem minoris segmenti fit productum maximum, toties fit etiam maximum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in dignitatem maioris; atque ita, si dignitates segmentorum pro exponentibus habeant terminos positos, & dignitas differentiæ, differentiam terminorum.

Sit AB recta linea inæqualiter secta in puncto C, & BC ad AC, vt 5 ad 3, qui sint termini positi. Producatur BA in F, donec æquetur F C ipsi CB, & AF erit differentia segmentorum BC & AC. Quoniam verò segmentum maius B C sic est ad minus C A, vt 5 est ad 3, erit diuidendendo AF ad CA, vt est 2 ad 3. Nunc fiant duo producta qualia diximus,

primum FA 2 in AC 3, ex dignitate ipsius FA, differentiæ segmentorum, ducta in dignitatem minoris segmenti AC. Secundum AC 3 in CB 5, ortum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in dignitatem maioris. Prima dignitas FA 2 habet pro exponente, 2, differentiam datorum terminorum, reliquæ habent 3 & 5, terminos positos, vt imperabatur. Dico, si productum primum est maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ FC [esse autem eiusmodi supponamus], etiam secundum fore productum maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ positæ AB.

Sumatur in AB alius punctus præter punctum C, & esto, D; qui accipi à nobis potest infra punctum C, vel supra. In vtroque casu FA, nequit habere eam rationem ad AC, quam habet ad AD, sed maiorem aut minorem habebit, atque adeò FD non est secta in puncto A secundum rationem ipsius FA ad AC: fiat porrò FE ad ED, vt FA ad AC, & productum FE 2 in ED 3, per secundum Lemma, erit maximum [æquè ac productum FA 2 in AC 3] & consequenter maius simili producto FA 2 in AD 3, facto ex segmentis eiusdem rectæ FD. Quod maximum FE 2 in ED 3 habet eandem rationem ad FD 5, dignitatem sibi homogeneam, quam FA 2 in AC 3 ad FC 5, vt ex duobus primis Lemmatibus colligitur; igitur FA 2 in AD 3 [quod diximus esse minus producto FE 2 in ED 3] minorem rationem habet ad FD 5, quàm FE 2 in ED 3 ad idem FD 5, seu minorem, quàm FA 2 in AC 3 ad FC 5; & permutando, FA 2 in AD 3 minorem habet rationem ad FA 2 in AC 3 [seu, per Lemma quartum, AD 3 minorem habet rationem ad AC 3] quam FD 5 ad FC 5, & longè minorem, quàm CB 5 ad BD 5. Quippe sunt rectæ DB, CB, FC, & FD, Arithmeticè proportionales cum excessu DC; ac propterea in primo casu FD, maxima, in secundo casu FD, minima est ad FC in minori ratione quàm CB ad DB, & quintuplicata ratio FD ad FC, nempe ratio ipsius FD 5 ad FC 5, est minor quintuplicata ratione CB ad DB, seu CB 5 ad DB 5.

F	F
2	2
	E A 2
A	
D	E
C	C
	D
B	B

Igitur cum quatuor quantitatum, AD 3, AC 3, CB 5, & DB 5, prima ad secundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam, per quintum Lemma, productum AD 3 in DB 5 factum ex duabus extremis, erit minus producto AC 3 in CB 5 ex medijs. Similiter ostendes, aliud quodcumque productum simile minus esse producto AC 3 in CB 5, quia punctus D ad libitum sumitur. Ergo AC 3 in CB 5 productum est maximum omnium. Quod &c.

Hactenus de recta linea AB inæqualiter secta, quum est segmentum maius ad minus, vti numerus ad numerum. Restaret altera pars Theorematis, quum est quemadmodum maius segmentum ad minus, sic numerus ad vnitatem. Hoc tamen constructione ac ratione tàm similibus modò factis concluditur, vt id sibi quisque inuenire, explicare ac dilatare facillime possit. Lectoribus autem scribimus à Geometria & ab Algebra instructioribus, quos huiuscemodi rerum intellectu facilium explicatione frustra defatigaremus; Quare pergimus ad reliqua vsum præstantissimum habentia ad inueniendas plurium linearum tangentes, figurarum centra grauitatis & quadraturas, & ad alia, item multa, quæ iusto seruamus Operi; vbi dabimus nouam solidorum Conicorum seriem, qui secti exhibent infinitas, vti vocant, hyperbolas, infinitas parabolas, infinitas ellipses, &, analogiam seruando, circulos etiam infinitos. Vnde Lectoribus manifestè apparebit, de Conicis me plus multò adinuenisse, quàm cæteros, eosque ingeniosissimos Viros, qui communem tantum hyperbolen, parabolen, ellipsin, & circulum [figuras Conici in nostra noua serie prædicta, secundi gradus] agnouerunt; alias tertij & quarti & cæterorum non item; nisi quod de parabolis infinitis per puncta in plano descriptis pauca, licet cognitione dignissima, tradidere nonnulli, quos inter, duo præcellentes ingenio viri, Fermatius, ac Torricellius, præceptor meus, inuentorum præstantia & numero commendabiles, ac Veteribus proximi; qui nouū insuper excogitarunt hyperbolarum infinitarum genus. Neque prætereundum puto, quàplures Apollonij propositiones, atque demōstrationes aptari sectionibus nostris & per omnia congruere, affectásque multipliciter æquationes harum sectionum ope resolui facillimè, & determinari posse. Nunc reuertor ad rem.

THEOREMA III.

Data recta linea, & duobus terminis, secundum quos fiat in linea data productum: hoc erit

omnium

maximum omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis eiusdem rectæ segmentis, velut ex radicibus.

Propositionem seco in partes duas. Primum dico, productum, quale descripsimus, esse omnium similium maximum, quum dantur termini æquales; quod in primo Theoremate demonstrauimus.

Deinde si dantur termini inæquales, sic rem ostendo.

Esto AB, recta data, & termini dati 5 & 2. Secetur recta in puncto C, sitque BC ad CA, vt 5 ad 2. Dico productum B C 5 in C A 2 factum in linea data secundum terminos datos esse maximum. Producatur BA in F, vt AF sit differentia segmentorum,& diuidendo primam porportionalitatem, nempè B C ad CA, vt 5 ad 2 [sicut in tertio Lemmate præscribitur] pergamus vsque dum incidamus in porportionem æqualitatis. In nostra hypothesi, primum erit, diuidendo 3, ad 2, vt F A differentia segmentorum ad AC minus segmentum; quam secundam porportionalitatem exhibet secunda figura,in qua fiat CE differentia segmentorum CA, FA, per consequens erit, diuidendo 1, ad 2,vt CE ad AC; quamquidem proportionalitatem seorsim exhibet tertia figura. Fiat E H differentia segmentorum C E, & AC, diuidendo erit 1 ad 1, vt EH ad EC; quæ est demum proportio æqualitatis;semper autem minus segmentum producimus vt æquemus maiori, & segmentorum differentiam constituamus.

B—5—C 2 A 3 F

E 1 C 2 A 3 F

A 1 C E 1 H

At retrorsum vicissim,incipiendo à recta EA tertiæ figuræ, cuius malus segm. AC est 2, minus segm. CE est 1, & illorum differentia H E itidem 1. Quoniam productum HE 1 in CE 1 est maximum in linea C H, per primum Theorema nostrum, erit proinde, per secundum Theorema, EC 1 in CA 2 maximum in recta E A.

Deinde in recta FC secundæ figuræ, maius seg. AF est 3, minus AC est 2, & segmentorum differentia EC est 1; porrò cum EC 1 in CA 2 sit maximum,erit per secundum Theorema, etiam maximum in recta FC productum AF 3 in AC 2.

Postremò in linea AB primæ figuræ,productum AF 3 in AC 2 est maximum, vt modò ostendimus, ergo per secundum Theorema est etiam maximum AC 2 in B C 5. Quod demonstrandum erat.

Si loco duorũ numerorũ detur numerus,& vnitas,fit similis cõstructio,& demonstratio.

SCHOLION.

Id quod in secundo Theoremate supponebamus; data recta linea, & datis, numeris 3, & 2, maximum fore productum in ea linea factum secundum numeros illos datos; nunc demonstrauimus in Theoremate hoc. Erat porrò illius Theorematis propositio conditionalis, ex posita illa hypothesi, non absoluta, vt patebit consideranti.

COROLLARIVM.

Si productum genitum ex dignitate ducta in dignitatem quamcumq; maximũ fuerit, illarum dignitatum radices & exponentes erunt Geometricè proportionales. Quippe in Theoremate ostendimus, productum in linea factum secundum terminos datos esse omnium maximũ; at productum eiusmodi, ex 5, definitione nostra, gignitur ex duabus dignitatibus, quarum exponentes rationem eam habet, quam dignitatum earundẽ radices.

PROBLEMA I.

Datam lineam rectam ita secare, vt productum ex dignitatibus segmentorum sit omnium similium maximum.

Sumantur exponentes duarũ illarũ dignitatum, rectaq; diuidatur in ratione horũ exponentium, & factum erit quod imperatur; quia productũ erit in linea data factũ secundum terminos positos,nimirũ secundũ exponẽtes;ac proinde erit maximũ per Theorema tertiũ.

PROBLEMA II.

Æquationem determinare, in qua potestas quæsita radicis negatur de homogeneo sub radice

L 2 *data,*

data, & dignitate ſua parodica, vt B in A - A 2 || Z 2 : vel B in A 3 - A 4 || Z 4 &c.

Oritur huiuſmodi æquatio ex dicta parodica dignitate poteſtatis negatæ ducta in B-A, differentiam datæ & quæſitæ radicis, Rem probo. Illa parodica dignitas affirmata, ſi primùm ducatur in A, radicem quæſitam negatam, gignet poteſtatem negatam vno gradu altiorem, quàm ſit ea parodica dignitas [vt patet ex natura multiplicationis] · deinde in † B radicem datam affirmatam ducta, gignet homogeneum affirmatum, ſub eadem dignitate parodica & radice data : Quæ duo producta ſunt ipſa pars æquationis, de qua in Problemate. Pars altera eſt homogeneum comparationis.

Rurſus, per Lemma quartum, ratio homogenei ad poteſtatem negatam eſt eadem, ac radicis datæ ad quæſitam; ſed minor eſt poteſtas homogeneo, de quo ipſa negatur & demitur. Ergo etiam radix quæſita minor eſt data; In qua proinde radice data nos rectè ſumimus ſegmentum æquale radici quæſitæ A, vt alterum ſegmentum ſit B-A, differentia datæ ac quæſitæ radicis.

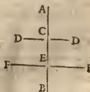
Quoniam igitur prima pars æquationis oritur ex B-A vno radicis datæ ſegmento, ducto in alterum ſeg. A, vel in huius poteſtatem, efficitur [per tertium Theorema] vt inde reſultans productum ſit maximum omnium ſimilium, quotieſcunque A, & B-A, ſegmenta rationem habent eam, quam exponentes ſuarum dignitatum. Sic in æquatione B in A 3 - A 4 || Z 4; ſi A, & B-A fuerint vt 3 ad 1, cubus ſegmenti A in B-A ductus gignet partem æquationis B in A 3 - A 4; quæ eſt productum in linea data B, omnium ſimilium maximum; cuius proinde magnitudinem non poteſt vnquam excedere homogeneum comparationis, quod ſemper æquari neceſſe eſt illi alteri æquationis parti. Vnde canon pro determinanda Problematis æquatione conficitur.

Fiat in radice maximum productum ſecundum terminos, qui ſunt exponentes eiuſdem radicis & parodica dignitatis, ſub quibus eſt homogeneum. Illius producti magnitudinem excedere non poteſt homogeneum comparationis.

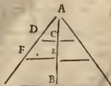
Idem procedit in alia æquatione orta ex multiplicatione ipſius, A, in B-A, vel in huius poteſtatem; ſemper enim eſt idem caſus tertij Theorematis noſtri, in quo productum factũ in linea [ſeu data radice B] ſecundum terminos datos eſt maximum: termini verò ſunt exponentes dignitatum ſegmenti A & alterius B-A.

Sed vno vel altero exemplo de Geometricis noſtris Opuſculis deprompto methodi facilitatem comprobemus.

E ſingulis punctis datæ rectæ AB ducãtur rectæ CD, EF, &c. rectæ inter ſe parallelæ, cũ data AB angulum quemcumq; efficientes. Sint autem harum parallelarum dignitates, & dignitates abſciſſarum AC, AE &c. Geometricè proportionales (id quod tripliciter contingere poſſe mox patebit) Tranſibit per extrema parallelarum puncta D, F, &c. perimeter figuræ, cuius diameter aut axis erit AB, vertex A, ordinatim verò ad diametrum applicatæ erunt ipſæ parallelæ.



Nam parallelarũ abſciſſarumq; dignitates ſi fuerint eiuſdẽ gradus, e. g. FE 1 ad DC 1, vt AE 1 ad CA 1 : vel cubi parallelarũ vt cubi abſciſſarum, figura erit triangulum, cuius proprietas notiſſima eſt, non parallelas modò & abſciſſas eſſe Geometricè proportionales, ſed parallelarũ & abſciſſarũ earumdem poteſtates omnes homogeneas; quarum ratio æquè multiplex eſt rationis linearũ ſeu radicum; ita vt cubi, & quadrato quadrata, &c. abſciſſarũ ſint vt cubi, & quadrato quadrata &c. parallelarum; & illorum quoque radices Geometricè proportionales.



Sin autem diuerſorum graduum fuerint dignitates parallelarum & abſciſſarũ, linea deſcripta erit curua, habens ſuum axem, & ad illum ordinatim applicatas, quarum dignitas eſt gradu ſuperior dignitate abſciſſarum; at contra dignitas applicatarũ ordinatim ad rectã [quæ curuam in vertice contingit] ſumptam pro axe, gradu inferior eſt dignitate abſciſſarum tangentis. De quo alibi latiùs dicam.

Esto igitur A' DB, vna ex præfatis figuris, eiusque axis AB, & vertex A; in qua quidem gradus dignitatis parallelarum sit altior gradu dignitatis absciſſarum; quæratur autem linea recta contingens figuram in puncto dato C. Ducatur ex hoc puncto linea ad axem ordinatim applicata, vt CD, & ponantur exponentes dignitatum, 3, & 2. Erunt consequenter in figura parallelarum cubi vt quadrata absciſſarum. Fiat absciſſa A D, inter verticem & ordinatim applicatam, ad A F, axem productum, vt minor numerus 2 ad, 1, differentiam exponentium, ductaque F C; Dico hanc esse tangentem quæsitam.

Productum enim FA 1 in AD 2 in linea D F, factum secundum terminos positos 1 & 2, est maximum, per Theorema tertium; semperque homogeneum dignitati parallelarum; (cum parallelarum dignitatẽ exponat maior datorum numerorum, maximum verò productum illud oriatur ex dignitatibus quas exponunt minor numerus & differentia numerorũ, quæ duo simul efficiunt numerum maiorem). Ergo si accipiamus alium punctum G in axe supra D, aut infra, & ducamus ordinatim applicatam G H, quæ secet in E rectam F (vbi opus fuerit productam); productum FA 1 in AG 2 non erit maximum in linea FG, quale est FA 1 in AD 2 in recta FD; propterea quod maior est vel minor ratio ipsius FA ad AG, quàm ad AD, & consequenter FG, FD non sunt porportionaliter diuisæ. Ergo maiorem rationem habet FA 1 in AD 2 ad FD 3 sibi homogeneum, quàm FA 1 in AG 2 ad FG 3, & permutando, maiorem rationem habet FA 1 in AD 2 ad FA 1 in AG 2, vel ex Lemmate quarto AD 2 ad AG 2) quàm FD 3 ad FG 3. Sed AD 2 ad AG 2 ponitur in figura; vt CD 3 ad HG 3: FD 3 ad FG 3, ob similitudinem triangulorum, vt CD 3 ad EG 3. Ergo maiorem rationem habet CD 3 ad HG 3, quàm CD 3 ad EG 3; & consequenter CD maiorem rationem habet ad HG, quàm ad EG, ac proinde HG recta est minor quàm EG, & punctus E cadit extra datam curuam AHCH. Eodem pacto de singulis punctis ductæ lineæ F. demonstratur illos cadere semper extrà curuã. Ergo F C est illius tãgens. Quod &c.

Hæ sunt parabolæ, vt vocant, infinitæ, quarum contingentes lineæ, quo modo ad datũ punctum duci possint, ostendimus. Nunc eandem methodum in hyperbolis quoque libet experiri. Præmittimus autem hoc necessarium Lemma.

Lemma sextum.

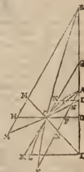
Dato angulo A B C, vtcumque secto per rectam B D, & puncto E in alterutro laterum comprehendentium angulum datum; ex eo puncto ducere lineam rectam quæ angulum A B C subtendat & à recta B D, secetur in data ratione R ad S.

Fiat H G F segmentum circuli capiens angulum æqualem dato, & compleatur circulus; deinde vt R ad S, ita fiat F L ad L H; vt angulus A B D ad E B D, sic arcus F I ad I H; ductaque I L producatur vsque dum pertingat ad K in circumferentia circuli, & connectantur puncta F, K, H. Ad datum punctum E fiat angulus B E A æqualis K H L, & E A secet BD in M & B A in puncto A. Dico rectam E A esse quæsitam, quæ à B D in M diuiditur in ratione data.

Siquidem anguli H & E: k & B sunt æquales, & hi secti proportionaliter [per trigesimam tertiam sexti Elementorum] à k L I, & B D. Ergo triangula F H K, A B E sunt æquiangula, & AE ad EB, vt HF ad Hk. Rursus æquiangula fecimus triangula MBE, LkH, & consequenter EB est ad EM, vt HK ad HL, & ex æqualitate ordinata AE ad EM, vt HF ad HL, & diuidendo FL ad LH [seu R ad S] vt AM ad ME. Quod &c.

Quod si punctus datus sit extra, vt in O, ducemus BO rectam [punctus autẽ O sic detur oportet, vt OB recta cum AB angulum faciat, nec sit ad lineam posita] & faciemus angulũ BOL æqualem differentiæ angulorum EBO, & H, & OL producta satisfaciet Problemati.

Sit



Sit hyperbole A C L, cuius diameter AB, vertex A, & dignitates ordinatim applicatarum habentes eam proportionem quam producta illis dignitatibus homogenea, orta ex dignitate abſciſſæ ducta in dignitatem, abſciſſæ & diametri, ex quibus vna recta conflata intelligatur. Exempli gratia, quadrato cubi ordinatarum, hoc eſt LI 5 ad CD 5, ſint, vt producta B I 3 in A I 2 ad BD 3 in AD 2, genita ex quadratis abſciſſarum A I, AD, & cubis rectarum BI, BD, quippe quas efficiunt eædem abſciſſæ & diameter.

Detur punctus C, ad quem ducenda ſit tangens, & ordinatim applicetur CD. Porrò ducatur BC, producta ad partes C, quoad oportuerit, & ex Lemmate præcedenti AE [ſecans CD in F, & in F item ſecta pro ratione 2 ad 3, qui numeri exponunt dignitates gignentes producta BI 3 in A I 2, & BD 3 in AD 2, ſubtendens angulum ECA], & tandem GC, parallela rectæ AE, occurrens ipſi AB in G. Dico tangentem quæſitam eſſe C G.

Sumatur in CG alius punctus K ſupra & infra C, &, ordinatim applicatis K I ſecantibus hyperbolen in L, ab I puncto ducatur IC incidens in rectam HB in puncto M, & ſecans AE in N; quæ HB ipſi AE parallela occurrit DC productæ in H.

Quoniam verò AE ſecatur in F in ratione 2 ad 3, FA 2 in FE 3, per tertium Theorema, eſt productum maximum, & ratio FE 3 ad NE 3, ſeu HB 3 ad M B 3 [propter ſimilitudinem triangulorum HCB, ECF: MBC, CEN] maior eſt ratione NA 2 ad AF 2. Ergo per Lemma quintum maius eſt HB 3 in AF 2 ipſo MB 3 in NA 2; quæ duo producta ſi comparentur cum CG 5, primum habebit maiorem rationem ad CG 5, quàm ſecundum. Sed ratio primi, quod eſt HB 3 in AF 2, ad CG 5 eadem eſt ac ratio BD 3 in AD 2 ad GD 5 [cum HB ad CG ſit vt BD ad GD, ob ſimilitudinem triangulorum HBD, CGD; eandemque proportionem habeant earum linearum cubi: tùm C G 2 ad A F 2, vt G D 2 ad A D 2]: ratio ſecundi, ſeu M B 3 in N A 2, ad C G 5 eſt eadem ac ratio B I 3 in A I 2 ad I G 5 [quia ſimilia ſunt triangula M B I, C G I; & M B, C G, B I, I G, rectæ earumque cubi proportionales: rurſus vt G I 2 ad I A 2, ſic C G 2 ad A N 2] Ergo maiorem rationem habet B D 3 in A D 2 ad G D 5, quàm B I 3 in I A 2 ad G I 5, & permutando B D 3 in A D 2 ad B I 3 in A I 2 [ſeu ex natura hyperboles C D 5 ad L I 5] maiorem rationem habet, quàm D G 5 ad G I 5, ſeu [ob ſimilitudinem triangulorum K G I, C G D] C D 5 ad I K 5, & per decimam quinti Elementum dignitas L I 5, minor eſt, quàm K I 5, & ſua radix, L I recta, minor recta K I; quare punctus K eſt extra curuam. Sic de cæteris punctis oſtendetur cadere extra curuam, atque adeò C G, hyperbolen tangere in ſolo C puncto. Quod &c.

Hæc porrò demonſtratio etiam ad ellipſes, & circulos accommodari poteſt.

Iàm verò quàm latè pateat vſus noſtri Theorematis tertij, ex propoſitis exemplis licet intelligere; nec ita multum diſſimili aut difficiliori via centra grauitatis, & quadraturas, quorum problematum paulò ante meminimus, inuenimus. Interim, ſi quis Apollonij conſtructionem atque demonſtrationem trigeſimæ quartæ propoſitionis primi Conicorum libri cum noſtris comparabit, nonnihil fortaſſe proficiet in Arte dilatandi propoſitiones & demonſtrationes. Nam id quod ille de quadratica tantum hyperbole, ellipſi, & circulo ſtatuit, nos ad omnes porrigimus hyperbolas, ellipſes, circuloſque infinitos. Quam viam placuit indicare, & ſupradicto exemplo confirmare.

Franciſ

Francisco Maria Naldinio S. Stephani Equiti, atque Discipulo suo eruditissimo Carolus Renaldinius F.

PAucis ab hinc annis, cum apud te Ruri quam humanissimè essem hospitio susceptus Theorema quoddam adinueni, magni sanè momenti, & à nemine, quod sciam animaduersum. Illud porrò tunc Arithmeticè primò quidem exhibui, mox animum ad illud idem Geometricè tractandũ appuli. Vtroque modo tibi transmittendum operæ pretium duxi, apud te enim ortum aliquo modo tuum esse non inmerito dixerim; eoque libentius id à me factum existimes, velim, quod te quotidie magis rerum nouarum in Mathematicis studijs ardere desiderio satis intelligo; nulla tamen animum admiratione subeunte, cum ingenuitas indolis, qua te natura donauit, id prorsus expostcat.

Quod attinet ad obseruationem Lunaris Eclipseos celebratæ anno labente 1670; mense Septembris D. 28. Cælum ferè semper nubibus obuolutum cum fuerit initium, & finem occultauit; quatenus tamen cælum oculis vsurpare licuit, stellasque fixas intueri, vt earum altitudinibus deprehensis, temporis momenta calculo assequeremur, breui vt spero inter nos communicabimus. Cæterum in huiusmodi obseruationibus vsi sumus Tubo cum graticula; longitudinis quatuor ferè brachiorum; Quadrans erat iustæ magnitudinis, cum eius costa foret duorum brachiorum, aderat doctissimus Geminianus Montanarius, in obseruando suam adhibens industriam, qui huc ob negotia quædam literaria se contulit. Tu interim de tuo statu; maximeque de conatibus egregijs ad excolendam virtutem, si quid mihi significaueris; argumentum erit amoris in me tui, quo vehementer delector; D. Dom. Andream fratrem tuum salutare iubeas velim. Tu interim Vale. Scribebam Patauij: Anno à Virginis partu M. DCLXX.

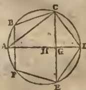
THEOREMA.

Si sit circulus, cuius diameter A D, in quo pentagoni B C D E F; latus D C; ductaque sit A C; Dico ipsam A C; longitudine esse hexagoni, & decagoni latus.

In eo videtur Theorema mirandum, quòd C D, pentagoni latus, vt Euclid. ostendit lib. XIII. Prop. 10. potest hexagoni, atque decagoni latus; at verò A C, eadem latera longitudine. Si numeris illud tractare libet, ex hypothesi, quod diameter sit 12. latus pentagoni erit ℞ (90 -- ℞ 1620) at si ex 144. quadrato diametri auferamus 90 -- ℞ 1620, nempe quadratum ipsius ℞ (90 -- ℞ 1620) remanebit 54 + ℞ 1620, pro quadrato ipsius A C, ex 47. primi Elementorum; vnde pro ipsa A C, remanebit ℞ (54 + ℞ 1620) hoc est 3 + ℞ 45. binomium enim illud 54 + ℞ 1620, quadratum est, cuius latus est 3 + ℞ 45. At verò hexagoni latus est 6; quo addito ad ℞ 45 -- 3. Decagoni latus (est enim ℞ 45 -- 3, latus decagoni in circulo, cuius diameter est 12) fit 3 + ℞ 45.

Geometricè tamen hæc eadem hunc in modum Analyticè præstabimus.

RESOLVTIO.



Quoniam A C, est longitudine latus hexagoni, vna cum latere decagoni, ergo quadratum A C, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo, sub ijsdem lateribus; sed quadratum DC, æquale est a, quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni. Æqualibus vtrinque additis, quadratum A C, plus quadrato C D, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus, vna cum quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, ergo quad. AC, plus quadrato CD, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus, sed quadratum A D, æquale est, quadratis A C, C D, ergo quadr. A D, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus, hoc est quadruplum quad. lateris hexagoni, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdẽ lateribus, ergo duplũ quadr. lateris hexagoni, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plux rectangulo sub ijsdem lateribus ergo quadratum lateris hexagoni, æquabitur quadrato lateris decagoni, plus rectangulo sub ijsdem lateribus. Quod ita se habet ex lib. XIII. prop. 11. Elementorum.

a prop. 10 lib. XIII. Element.

COMPOSITIO.

Quoniam quad. lateris hexagoni, æquale est quadrato lateris decagoni, plus rectangulo sub ijsdem lateribus, ergo duplum quadratum lateris hexagoni, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus rectangulo sub ijsdẽ lateribus; ergo quadruplũ quad. lateris hexagoni, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus; hoc est quadratum A D, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus

duplo

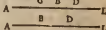
duplo rectangulo sub ijsdem lateribus, Sed quadratum A D, æquale est quadratis A C, C D, ergo quadrata A C, C D, æqualia erunt quadrato duplo lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus. Sed quadratum C D, æquale est quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, ergo æqualibus vtrunque sublatis, quadratum A C, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus, ergo A C, erit longitudine latus hexagoni, plus latere decagoni.

Ad Problema illud quod attinet de diuisione trianguli per rectam à puncto extra, vel intra triangulum, multa mihi dicenda occurunt, de quibus aliquando coram. Interim adnotabo, ad illud resoluendum, cum punctum primo fuerit extra, in neutro tamen è lateribus producto, facere hæc; nempe.

A dato angulo per datum in latere punctum, triangulum abscindere æquale triangulo dato. Item.

Data sit e. g. recta A L, infinita secta quidem in C, & B. Oportet iterum illam diuidere in D, vt A B, C D, A D, sint proportionales. Item

Data sit recta A L, diuisa quidem in B, oporteat iterum illam diuidere in D, vt A B, B D, A D, sint proportionales. Tandem



Ex dato angulo triangulum abscindere æquale spatio per lineam ductam ex dato extra triangulum puncto.

Horum præsidio Problemati fiet satis; sic etiam suo modo cum punctum fuerit intra, &c. de quibus coram vt dixi. Vale.

FINIS.

Noi Reformatori dello Studio di Padoua.

Hauendo veduto per fede del Padre Vicario Generale del Sant' Officio di Padoa, nel Libro intitolato *Caroli Renaldini Tractatus de Algebra Speciosa*, &c. non esserui cosa alcuna contro la Santa fede Cattolica, e parimente per attestato del Segretario nostro, niente contro Prencipi, e buoni costumi, concediamo licenza agl' Heredi di Paolo Frambotto di poterlo stampare osseruando gli Ordini &c.

Dat. à 21. Ottobre 1670.

{
{ Nicolò Sagredo Cau. Pr. Ref.
{ Battista Nani Cau. Pr. Ref.

Angelo Nicolosi Segr.

N-

I N D E X

Eorum, quæ in hoc Tractatu continentur.

M   circa

F I N I S.

